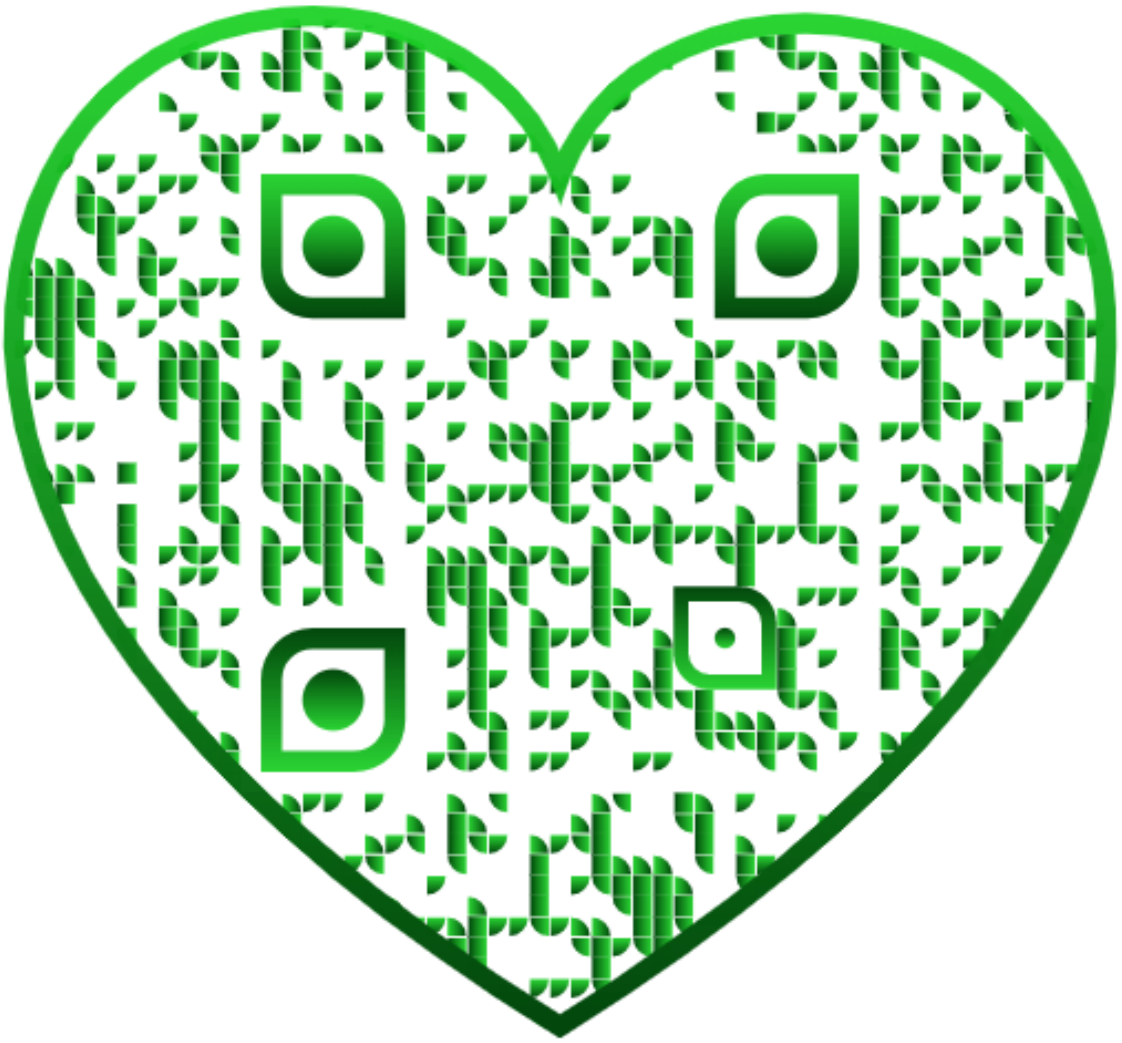
Bruno Aebischer

LICENCE 1
MATHÉMATIQUES

Introduction à l'analyse

- Cours complet
- + de 200 exercices
- Tous les corrigés détaillés

Vuibert



Introduction à l'analyse

Bruno Aebischer

Introduction à l'analyse

Cours & exercices corrigés

LICENCE 1
MATHÉMATIQUES

Vuibert

Du même auteur chez le même éditeur

Analyse. *Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique. Cours et exercices corrigés. Licence 2,* 448 pages environ.

Géométrie. *Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective. Cours et exercices corrigés. Licence 3,* 288 pages environ.

et des dizaines d'autres livres de référence, d'étude ou de culture :
mathématiques, informatique et autres spécialités scientifiques

www.vuibert.fr

En couverture : Escalier en double spirale de Giuseppe Momo, Vatican.
© Sylvain Sonnet/Corbis

Maquette intérieure : Sébastien Mengin/Edilibre.net
Composition et mise en page de l'auteur
Couverture : Linda Skoropad/Prescricom

ISBN 978-2-311-00274-4

Registre de l'éditeur : 580

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20 rue des Grands Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70

© Vuibert – juin 2011 – 5, allée de la 2e DB 75015 Paris

Anne-Marie, pour son soutien, ses relectures et tout son amour

Table des matières

Avant-propos **ix**

1 Fonctions continues – Fonctions dérivables **1**
1.1 Continuité, limites 1
1.2 Dérivation 12
1.3 Développement limité d'une fonction au voisinage de 0 23
1.4 Exercices 32

2 Étude de fonctions **37**
2.1 Plan d'étude d'une fonction 37
2.2 Ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité 37
2.3 Limites et branches infinies 38
2.4 Tangentes particulières 44
2.5 Variations 45
2.6 Exemple 46
2.7 Exercices 50

3 Nouvelles fonctions de référence **53**
3.1 Fonctions réciproques 53
3.2 Fonctions racines n-ièmes 56
3.3 Fonctions trigonométriques réciproques 58
3.4 Trigonométrie hyperbolique 65
3.5 Fonctions trigonométriques hyperboliques réciproques 68
3.6 Exercices 74

4 Calcul intégral **77**
4.1 Rappels sur les primitives 77
4.2 Intégrales 79
4.3 Quelques techniques de calcul intégral 82
4.4 Intégration des fractions rationnelles 89
4.5 Exercices 97

5 Équations différentielles **101**
5.1 Généralités 101
5.2 Équations différentielles du premier ordre à variables séparables 104
5.3 Équations différentielles du premier ordre linéaires 106
5.4 Équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants 112
5.5 Exercices 120

Indications pour la résolution des exercices **125**

Solutions des exercices **135**
1. Solutions des exercices sur les limites, la continuité et la dérivation 135
2. Solutions des exercices sur les études de fonctions 162
3. Corrigés des exercices sur les nouvelles fonctions de référence 190
4. Corrigés des exercices sur le calcul intégral 211
5. Corrigés des exercices sur les équations différentielles 238

Annexe : Quelques techniques de calcul **269**
1. Inégalités 269
2. Valeur absolue 269
3. Racine carrée 270
4. Trinômes, équations et inéquations du second degré 271
5. Coefficients du binôme, triangle de Pascal, formule du binôme 272
6. Trigonométrie 273
7. Résolution de systèmes 275

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné à tous les étudiants qui peuvent avoir besoin d'analyse pour leurs études supérieures. Il permettra à tous les scientifiques de trouver des résultats rigoureux et bien expliqués, mais sans avoir à rentrer dans des explications compliquées. Les futurs étudiants de physique, chimie, électronique, mécanique, ou même économie ou sciences naturelles trouveront là la plupart des outils de calcul en analyse dont ils pourront avoir besoin. Pour les étudiants qui feront des mathématiques, cet ouvrage leur permettra d'avancer rapidement et avec précision dans la découverte de ces outils, sur lesquels ils reviendront éventuellement plus tard lorsqu'ils éprouveront le besoin de « tout démontrer ».
La particularité de cet ouvrage est qu'il a été conçu pour permettre à un étudiant isolé d'acquérir, de comprendre et de dominer par lui-même toutes les notions abordées.

Dans cet ouvrage, on trouvera d'abord 5 chapitres de cours, rédigés dans un style facile à lire, très détaillés :

1. un chapitre sur les propriétés des fonctions ; on y travaille sur les limites, la continuité, la dérivabilité ; on prolonge l'étude seulement esquissée au lycée, en étudiant avec précision les prolongements par continuité, les tangentes verticales, et on aborde la technique du calcul de développements limités ;
2. un chapitre sur les études de fonctions ; on dépasse largement ce qui se fait au lycée, en étudiant systématiquement la plupart des particularités qu'on peut rencontrer : points d'arrêts, tangentes verticales, branches infinies ;
3. un chapitre dans lequel on introduit des nouvelles fonctions de référence qu'on ne peut ignorer lors d'études supérieures : fonctions racines n-ièmes, fonctions trigonométriques réciproques, fonctions de trigonométrie hyperbolique directes et réciproques ;
4. un chapitre sur l'intégration dans lequel on approfondit les définitions et les méthodes du lycée, en introduisant de nouveaux outils : l'intégration par parties, le changement de variable, la notation d'intégrale indéfinie pour le calcul de primitives ;
5. un dernier chapitre sur la résolution des équations différentielles élémentaires : du premier ordre linéaires ou à variables séparables et du second ordre à coefficients constants.

Enfin, ce livre se termine par une annexe regroupant les techniques indispensables aux calculs qu'on doit faire dans le supérieur, et que les professeurs considèrent souvent comme « acquis » sans avoir conscience que ce n'est plus du tout enseigné au lycée, compte tenu des évolutions des programmes. Le lecteur ne comprenant pas une technique utilisée dans une démonstration ou une résolution d'exercice est invité à consulter cette annexe.

À la fin de chaque chapitre, on trouvera une liste d'exercices dont la difficulté est très progressive.
Pour chaque exercice, on trouve d'abord des « indications » pour les résolutions, puis un corrigé détaillé. Les indications sont regroupées dans un chapitre à part, et un dernier chapitre regroupe tous les corrigés. Le lecteur est invité à commencer par essayer de résoudre seul les exercices proposés, et seulement s'il ne voit pas comment commencer il pourra consulter d'abord les indications, puis il pourra vérifier sa solution en la comparant avec celle de l'ouvrage, qui est toujours très détaillée et dont la rédaction se veut pouvoir servir de modèle.
C'est à partir d'un cours par correspondance qui a fait la preuve de son efficacité avec des générations d'étudiants que ce livre a été réalisé.
Nous souhaitons une bonne réussite à tous nos lecteurs.

CHAPITRE 1

Fonctions continues – Fonctions dérivables

1.1 Continuité, limites

1.1.1 Introduction

Ce cours se situe dans le prolongement de l'enseignement des mathématiques dans les classes de lycée. En particulier, la notion de continuité dont nous allons parler et à partir de laquelle nous allons étudier les limites, la dérivabilité et les développements limités est celle qui est présentée en Terminale et correspond à la notion intuitive de continuité : est continue une fonction dont la courbe représentative se trace « sans lever le crayon ».
La « vraie » définition de la continuité « avec des epsilons » n'est pas dans l'objectif de cet ouvrage, et sera étudiée dans d'autres cours. Voici cette définition, pour faire rêver ceux qui ne continueront pas en mathématiques, et aussi ceux qui devront un peu plus tard la maîtriser.

Définition 1.1 Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_f$, et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$ qui est tel qu'il existe un intervalle *ouvert* I contenant x_0 et inclus dans $\mathcal{D}_f$ (on a $x_0 \in I \subset \mathcal{D}_f$).
On dit que f est continue en x_0 lorsqu'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \Big[|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \Big]^1.$$

Même sans cette définition rigoureuse, on peut, à partir de quelques résultats admis simples et intuitifs, présenter les bases de l'analyse dont on a besoin dans le supérieur, c'est ce que nous ferons dans cet ouvrage.

[1] Les symboles $\forall$ et $\exists$ qui signifient respectivement « quel que soit » et « il existe »
La lettre grecque η se lit « êta », et bien sûr, ε se lit « epsilon »

1.1.2 Fonctions continues de référence

En pratique, on admet que toutes les fonctions de référence suivantes sont continues, c'est-à-dire continues en tout point de leur ensemble de définition [2] :

- les fonctions polynômes (de la forme $x \longmapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, les a_i étant des constantes réelles) ;
- les fonctions rationnelles (qui sont des quotients de deux polynômes) ;
- les fonctions trigonométriques sin, cos, tan ;
- la fonction exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, la fonction logarithme ln ;
- la fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$;
- la fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ (pour cette dernière fonction, la continuité en 0 n'est qu'une continuité à droite, car $\sqrt{x}$ n'est pas défini à droite de 0).

En résumé, toutes les fonctions usuelles rencontrées jusqu'à présent sont continues, à l'exception d'une seule fonction classique : la fonction partie entière (voir Exercice 1.2).

1.1.3 Opérations sur les fonctions continues

À partir des fonctions de référence, on fabrique toutes sortes de fonctions continues, grâce à la proposition suivante, admise :

Proposition 1.2 Est continue (c'est-à-dire : continue sur son ensemble de définition) toute fonction f caractérisée par la donnée d'une expression définissant $f(x)$ en une seule formule ne contenant que des fonctions usuelles continues, des opérations $+, -, \times, \div$, élévation à la puissance, ou des compositions ($\circ$) de telles fonctions.

Exemple : On admet sans démonstration que la fonction

$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{x + 3 - 3\tan(x - \frac{\pi}{3})}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 3\ln(x^3+5)} - (3x+2)^{\sin x}}$$

est continue, c'est-à-dire continue sur son ensemble de définition, même si, ici, la détermination de son ensemble de définition serait extrêmement compliquée.

1.1.4 Limite d'une fonction en un point intérieur à l'ensemble de définition

Pour un point x_0 intérieur à l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f (c'est-à-dire tel qu'il existe un intervalle [3] ouvert I contenant x_0 et inclus dans $\mathcal{D}_f$: on dit dans ce cas que f est définie **au voisinage de** x_0), la notion de limite de la fonction f en x_0 (ou, ce qui

[2] L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des x qui sont tels que $f(x)$ existe. Par exemple, si $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et si $g : x \longmapsto \sqrt{x}$, on a $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

[3] Un intervalle ouvert est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est sous une des quatre formes suivantes : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $]a, b[$.

revient au même, pour $x \to x_0$, « x tend vers x_0 ») coïncide exactement avec la notion de continuité :

Définition 1.3 Soit f une fonction et soit x_0 un point intérieur à l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, alors f admet une limite ℓ en x_0 si et seulement f est continue en x_0 et si $\ell = f(x_0)$. On note, dans ce cas $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = f(x_0)$, ou $\lim_{x_0} f = \ell = f(x_0)$.

1.1.5 Prolongement par continuité d'une fonction, limite d'une fonction en un trou isolé de l'ensemble de définition

Définition 1.4 Un trou isolé de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f est un réel x_0 qui n'appartient pas à $\mathcal{D}_f$, mais qui est tel qu'il existe un intervalle ouvert I, contenant x_0, tel que $I \setminus \{x_0\} \subset \mathcal{D}_f$.[4]

Dans cette situation, l'existence d'une limite de la fonction f en x_0 coïncide avec la possibilité de construire un prolongement par continuité pour la fonction f.

Définition 1.5 Soit f une fonction et soit x_0 un *trou isolé* de l'ensemble de définition. On suppose qu'il existe une fonction $\widehat{f}$ *continue* dont l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{\widehat{f}}$ contient I en entier (donc en particulier $x_0 \in \mathcal{D}_{\widehat{f}}$) et qui vérifie $\widehat{f}(x) = f(x)$ pour tous les $x \in I \setminus \{x_0\}$. Dans cette situation, on dit que $\widehat{f}$ est le prolongement par continuité de f à I, et on peut définir la limite pour $x \to x_0$ de la fonction f : on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = \widehat{f}(x_0)$.

Exemple : Soit f la fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x-2)}.$$

Il est évident que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.
Si l'on veut étudier la limite de la fonction f en 1 (qui est bien, ainsi que 2, un trou isolé de l'ensemble de définition de f), on peut procéder ainsi. On remarque que $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x-1}{x-2}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Soit $\widehat{f}$ la fonction définie par $\widehat{f}(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.
Notons bien que f et $\widehat{f}$ ne sont pas des fonctions égales : elles n'ont pas le même ensemble de définition puisque f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ alors que $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

[4] Le symbole \ est la différence d'ensemble. Si A et B sont deux ensembles, alors $A \setminus B$ est le sous-ensemble de A formé des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. Par exemple, on a vu plus haut que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas dans $\{0\}$, c'est-à-dire non nuls : c'est bien $\mathbb{R}^*$.
Le symbole $\subset$ est l'inclusion d'ensembles : si A et B sont deux ensembles, $A \subset B$ signifie que tout élément de A appartient aussi à B. Par exemple, il est évident que $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$; en revanche, on a $\mathbb{R}^+ \not\subset \mathbb{R}^*$, puisque $0 \in \mathbb{R}^+$ mais $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Alors $\widehat{f}$ est bien un prolongement par continuité de f. En effet, $\widehat{f}$ est une fonction rationnelle définie et continue sur l'intervalle ouvert $I =]-\infty, 2[$, en particulier en 1, et on a bien $f(x) = \widehat{f}(x)$ pour $x \neq 1$.
On peut donc écrire $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \widehat{f}(1) = 0$.

En pratique, on utilise le prolongement par continuité de f sans le dire, on rédige simplement :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1-1}{1-2} = 0$$

1.1.6 Limites à droite, limites à gauche

Nous ne définissons ici que les limites à droite, les limites à gauche se définissent de manière analogue.

Définition 1.6 Soit f une fonction définie à droite d'un réel x_0, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert du type $]x_0, b[$ qui est inclus dans $\mathcal{D}_f$.
On suppose qu'il existe une fonction g définie et continue en x_0 (éventuellement seulement continue à droite en x_0) telle que pour tout $x \in]x_0, b[$, on a $f(x) = g(x)$. Dans cette situation, on dit que g est le prolongement par continuité à droite de f en x_0, et on peut affirmer que la limite à droite de f en x_0 existe et vaut $\ell = g(x_0)$. On note $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = g(x_0) = \ell$ (ou $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \ell = g(x_0)$)

Retenons que pour que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell$, il faut et il suffit que la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ pour $x > x_0$ et $g(x_0) = \ell$ soit une fonction continue à droite en x_0.
En conséquence, on a la proposition suivante :

Proposition 1.7 Si une fonction f est définie au voisinage de x_0, et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors on a en particulier $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$.

La réciproque est un tout petit peu plus délicate :

Proposition 1.8
Si une fonction f est définie au voisinage de x_0, et si on a $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$, **si, de plus** on a $\ell = f(x_0)$, alors on peut conclure que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.
Si une fonction f n'est pas définie en x_0, mais qu'il existe un intervalle ouvert I tel que $I \setminus \{x_0\} \subset \mathcal{D}_f$, si on a $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$, alors on peut conclure que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

1.1.7 Limites à droite ou à gauche infinies

Définition 1.9 Soit f une fonction définie à droite de x_0. On suppose que la limite à droite de f en x_0 est égale à 0. S'il existe un intervalle du type $]x_0, b[$ dans lequel on a, pour tout x, $f(x) > 0$, alors on peut écrire $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = 0+$.

On définit de la même manière une limite à droite qui serait 0–, ou des limites à gauche valant 0+ ou 0–.

Définition 1.10 On dit que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = +\infty$ (on dit que la limite à droite de f en x_0 vaut « plus l'infini ») lorsqu'on a $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{1}{f(x)} = 0+$.

De même $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = -\infty$ (on dit que la limite à droite de f en x_0 vaut « moins l'infini ») lorsqu'on a $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{1}{f(x)} = 0-$.

On définit de la même manière les limites à gauche infinies.
Lorsqu'une limite à droite ou à gauche en x_0 est infinie, on dit que la droite verticale $x = x_0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

1.1.8 Limites à l'infini

Préliminaire : on dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ lorsqu'il existe un intervalle du type $]a, +\infty[$ qui est inclus dans $\mathcal{D}_f$. Lorsqu'une fonction f est définie au voisinage de $+\infty$, on peut étudier la limite de cette fonction pour $x \to +\infty$. Idem en $-\infty$.
On admet les résultats suivants que nous reverrons plus loin comme des limites de référence :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = x.$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ (remarquons qu'on peut aussi affirmer qu'on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0+$).

À partir de ces quelques limites de référence, on peut, grâce aux règles d'opérations sur les limites, en déduire de nombreuses autres.

1.1.9 Règles d'opération sur les limites

Soit α un symbole correspondant à un « endroit » où l'on peut calculer des limites : dans ce qui suit, α désignera donc soit un réel x_0, soit un « réel à droite » x_0+, soit un « réel à gauche » x_0-, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
On supposera dans les tableaux qui suivent, que f et g sont deux fonctions définies au voisinage de α ; ce qu'on entend par « voisinage de α » :

- si α est un réel x_0, un voisinage de x_0 est un intervalle ouvert qui contient x_0, (les fonctions peuvent alors ne pas être définies en x_0) ;

- si α est un « réel à droite » x_0+, un voisinage de x_0+ est un intervalle ouvert du type $]x_0, b[$;
- si α est un « réel à gauche » x_0-, un voisinage de x_0- est un intervalle ouvert du type $]a, x_0[$;
- si α est $+\infty$, un voisinage de $+\infty$ est un intervalle ouvert du type $]a, +\infty[$;
- si α est $-\infty$, un voisinage de $-\infty$ est un intervalle ouvert du type $]-\infty, b[$.

On supposera aussi que f et g admettent une limite finie ou infinie en α. La valeur de cette limite sera précisée dans les entrées des tableaux qui suivent.

Règles d'addition des limites

Le tableau suivant donne $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))$ en fonction de $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ et de $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$.

$\lim_\alpha f$ \ $\lim_\alpha g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Les points d'interrogation dans le tableau correspondent à des « formes indéterminées », des situations où on ne peut pas conclure directement.

Règles de multiplication des limites

Le tableau suivant donne $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)g(x))$ en fonction de $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ et de $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$.

$\lim_\alpha f$ \ $\lim_\alpha g$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell>0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell<0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Règles d'inversion des limites

Le tableau suivant donne $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$ en fonction de $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

$\lim\limits_{\alpha} f$	$\ell \neq 0$	0	$0+$	$0-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{\alpha} \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	?	$+\infty$	$-\infty$	$0+$	$0-$

Il est clair qu'à partir des deux derniers tableaux, on peut aisément en déduire un tableau de division de limites, qu'on utilise tout aussi souvent.
Dans un tableau de division de limites, il faudra mettre des points d'interrogation pour tous les quotients où le numérateur et le dénominateur ont tous deux une limite nulle, et aussi pour tous les quotients où le numérateur et le dénominateur ont tous deux une limite infinie.
Les formes indéterminées classiques sont donc du type : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; il y a aussi l'indétermination « $\frac{1}{0}$ » : normalement une limite de ce type est infinie, mais lorsque le signe du dénominateur n'est pas connu, on ne peut pas conclure.

1.1.10 Limites de référence

Limites « normales »

On connaît, en plus des limites tirées de la continuité des fonctions usuelles, les limites suivantes, qu'on utilisera sans justification.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ (ces limites sont des « évidences »).
  On en déduit aisément en appliquant plusieurs fois une règle de multiplication des limites :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0+$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

Formes indéterminées de référence

En plus des limites ci-dessus, on sait lever les indéterminations suivantes :

- **Limite à l'infini d'un polynôme** : en factorisant le terme de plus haut degré, on montre aisément que la limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son terme de plus haut degré.

  Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - x^2 + 5x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$;
  $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - x^3 - 5x = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$.

- **Limite à l'infini d'une fonction rationnelle** : de la même manière, on montre aisément que la limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du

quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2+5x-1}{2-3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{-3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (n\in\mathbb{Z})$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0+ \quad$ et $\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0-.$

1.1.11 Limites nulles et limites en 0

Lorsqu'on étudie la limite d'une fonction en $x_0 \in \mathbb{R}$, on peut toujours se ramener à l'étude d'une limite en 0, car il est tout à fait clair, en posant $x = x_0 + h$ ou $h = x - x_0$ (et d'ailleurs en appliquant la proposition qui suit sur les compositions de limites), que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \iff \lim\limits_{h\to0} f(x_0+h) = \alpha$.
De la même manière, lorsque le résultat d'un calcul de limite est un réel ℓ, on peut se ramener à un calcul de limite où le résultat est nul, il suffit d'étudier la limite de $f(x)-\ell$; en effet, on a :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to\alpha}\big(f(x)-\ell\big) = 0.$$

On peut donc ramener le calcul d'une limite en un réel x_0 avec un résultat réel en un calcul d'une limite en 0 où le résultat est nul.

1.1.12 Limites et inégalités

On admet les règles de comparaison de limites suivantes :

Proposition 1.11 Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de α (un endroit où on peut calculer une limite).
On suppose que pour tout x dans un voisinage de α, on a $f(x) \leqslant g(x)$. On suppose de plus que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ existent (ce sont des limites finies ou infinies). Alors on peut conclure qu'on a

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \leqslant \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

Remarque : Cette propriété ne s'étend pas aux inégalités strictes. Si on a comme hypothèse que $f(x) < g(x)$ dans un certain voisinage de α, alors la conclusion est quand même que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$, et non pas que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) < \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$.
Voici un contre-exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$ en $+\infty$. Il est clair que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $f(x) < g(x)$, et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ n'est pas strictement inférieure à $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (qui est aussi une limite nulle) : on n'a pas $0 < 0$, mais seulement $0 \leqslant 0$.

Dans cette dernière proposition 1.11, on doit supposer que les deux limites existent. Il peut arriver qu'une des deux limites n'existe pas, ou même qu'aucune des deux limites n'existent bien qu'on ait $f(x) \leqslant g(x)$ dans un voisinage de α.
En revanche, dans le théorème 1.12 qui suit, pour une des fonctions concernées, on ne met pas en hypothèse que sa limite en α existe, et pourtant on obtiendra, en conclusion, à la fois l'existence de cette limite et sa valeur.

Théorème 1.12 (des gendarmes) *Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de α. On suppose que pour tout x dans un voisinage de α, on a*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

On suppose de plus que $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ et $\lim_{x\to\alpha} h(x)$ existent et sont égales *: on a*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x) = \ell.$$

Alors on peut conclure :
- *d'une part que la limite de $g(x)$ quand $x \to \alpha$ existe ;*
- *d'autre part que cette limite vaut aussi ℓ.*

La conclusion s'écrit donc aussi, tout simplement : $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell$.

Une application classique de ce théorème des gendarmes est la suivante :

Proposition 1.13 Soit g une fonction définie au voisinage de α qui vérifie

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0.$$

On suppose que f est une fonction définie au voisinage de α, et qui est telle que pour tout x dans un voisinage de α on a :

$$|f(x)| \leqslant g(x).$$

Alors on peut conclure que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ (la conclusion est donc d'une part que cette limite existe, d'autre part que cette limite est nulle.)

Un cas particulier du théorème des gendarmes est le suivant :

Proposition 1.14 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de α. On suppose que pour tout x dans un voisinage de α, on a $f(x) \leqslant g(x)$. On suppose de plus que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.
Alors on peut conclure :
- d'une part que la limite de $g(x)$ quand $x \to \alpha$ existe ;
- d'autre part que cette limite vaut aussi $+\infty$.

On peut retenir que dans cette version du théorème des gendarmes, pour obtenir une limite infinie, un seul « gendarme » est suffisant. (On a bien sûr une version analogue de ce théorème pour obtenir une limite qui vaut $-\infty$).

1.1.13 Compositions de limites

On compose sans difficulté les calculs de limites (cela revient à donner une règle de calcul pour la limite d'une fonction composée, même si la disposition pratique d'un tel calcul évite en général d'utiliser la notation $f \circ g$).

Proposition 1.15 Soient f et g deux fonctions, et soient α et β deux « endroits » où l'on peut calculer une limite : α est donc soit un réel x_0, soit un « réel à droite » x_0+, soit un « réel à gauche » x_0-, soit encore $+\infty$ ou $-\infty$; de manière tout à fait indépendante, β est aussi une de ces cinq sortes de limites possibles, ou « lieux » de calculs de limites.
On suppose que f est définie au voisinage de α, et que g est définie au voisinage de β. On suppose de plus qu'on a :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\beta} g(x) = \gamma$$

(γ est lui aussi n'importe quel résultat d'un calcul de limite). Alors on a

$$\lim_{x\to\alpha} g\circ f(x) = \gamma.$$

En pratique : On écrira simplement, (avec les hypothèses de la proposition), en prenant la précaution de changer de lettre pour une des deux fonctions, et donc en « posant » mentalement $y = f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \\ \lim\limits_{y\to\beta} g(y) = \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma.$$

Exemple : On souhaite calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Remarquons que α et β sont des réels strictement positifs quelconques, ce ne sont pas forcément des entiers.
Tout d'abord un « rappel » : on définit, pour $x > 0$, quel que soit le réel α, le nombre x^α par :

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$$

Cette définition prolonge la propriété connue pour les entiers : $\ln(x^n) = n \ln x$.
Déterminons déjà la limite en $+\infty$ de x^β : on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, et puisque $\beta > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \beta \ln x = +\infty$. Comme d'autre part on a $\lim\limits_{y\to+\infty} \mathrm{e}^y = +\infty$, on peut conclure qu'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\beta \ln x} = +\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta = +\infty \text{ (pour } \beta > 0).$$

On peut maintenant déterminer la limite en $+\infty$ du numérateur :
On sait que $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, or, on a aussi $\lim_{y\to+\infty} y^\alpha = +\infty$ (puisque $\alpha > 0$, on applique la propriété qu'on vient d'obtenir), on peut donc conclure qu'on a

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^\alpha = +\infty.$$

Tout ce qu'on a fait, pour l'instant, c'est constater qu'on est en présence d'une « forme indéterminée » du type $\frac{\infty}{\infty}$; mais nous allons maintenant lever cette indétermination.

Soit $f(x) = \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$. Remarquons tout d'abord que f est bien définie au voisinage de $+\infty$, en effet $\ln x > 0$ sur $]1,+\infty[$, et on peut donc bien calculer le numérateur (et aussi le dénominateur, qui n'est pas nul) sur cet intervalle, qui est bien un voisinage de $+\infty$.

On peut écrire $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha$.

En effet, on montre facilement qu'on peut calculer avec des puissances réelles comme on a l'habitude de le faire avec des puissances entières : on a par exemple $a^b a^c = a^{b+c}$, $a^c b^c = (ab)^c$, $(a^b)^c = a^{bc}$, et aussi $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \dfrac{a^c}{b^c}$... Nous avons utilisé ici les deux dernières de ces propriétés.

Calculons la limite en $+\infty$ de $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}$; pour cela, on écrit

$$g(x) = \frac{\ln(x^1)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} = \frac{\ln\left(x^{\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}\right)}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} = \frac{\ln\left(\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}.$$

On utilise alors que $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\beta}{\alpha}} = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0+$ (ceci est une forme indéterminée de référence, voir § **1.1.10**, p.7), donc on a, par composition de limites, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} = 0+$.

En multipliant par $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, on trouve bien $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0+$.

Pour conclure, on remarque qu'on a $f(x) = g(x)^\alpha$. Pour cela, il nous reste à déterminer la limite en $0+$ de $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

On sait que $\lim_{x\to0+} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x\to0+} \alpha \ln x = -\infty$ ($\alpha > 0$). Comme d'autre part $\lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0+$, on peut conclure que $\lim_{x\to0+} \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \lim_{x\to0+} x^\alpha = 0+$.

Maintenant, nous avons tous les éléments pour terminer :
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0+$ et $\lim_{y\to0+} y^\alpha = 0+$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (g(x))^\alpha = 0+$. On a donc montré

$$\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0+.$$

On retient cette propriété en disant que les fonctions puissances « l'emportent » sur les fonctions logarithmes.

1.2 Dérivation

1.2.1 Développement limité à l'ordre 1

Soit f une fonction définie en x_0 et au voisinage de x_0. On suppose qu'il existe deux nombres réels a et b, tels que dans un voisinage de x_0, on a :

$$f(x) = a + b(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x) \tag{1.1}$$

Pour l'instant cette hypothèse n'est pas contraignante : quels que soient a et b, il suffit de poser, pour $x \neq x_0$ *:* $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-a}{x-x_0} - b$, *(avec en plus* $\varepsilon(x_0) = 0$*) pour obtenir cette égalité (1.1). Réciproquement, en partant de cette égalité, on trouve que nécessairement on doit avoir* $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-a}{x-x_0} - b$

On suppose de plus qu'on a

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0. \tag{1.2}$$

C'est en fait la seule hypothèse que l'on fait, mais qui concerne non seulement la fonction ε*, mais aussi forcément les réels a et b puisque cette fonction* ε *est liée à ces deux réels.*

Dans ce cas, on dit que f admet un **développement limité** à l'ordre 1 au voisinage de x_0 (on note en abrégé : un d.l.$_{x_0}(1)$) ; le développement limité de f à l'ordre 1, au voisinage de x_0 est cette équation (1.1), accompagnée (parfois de manière implicite) par la condition (1.2).
Dans ce développement limité $f(x) = a + b(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$, le polynôme de degré 1 : $a + b(x-x_0)$ est *la partie régulière*, tandis que $(x-x_0)\varepsilon(x)$ est *le reste.*

1.2.2 Conséquences de l'existence d'un d.l. à l'ordre 1

Proposition 1.16 Si f admet un d.l.$_{x_0}(1)$, dans l'égalité (1.1), alors $a = f(x_0)$, f est continue en x_0 et $b = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-a}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (et donc cette limite existe et est réelle).

Preuve Calculons $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, en nous servant de l'expression 1.1 et de la condition 1.2 : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a + b(x_0-x_0) + (x_0-x_0).0 = a$. Mais f est définie en x_0, donc on a vu que ce résultat implique qu'on a aussi $f(x_0) = a$ et que f est continue en x_0.
D'autre part, on a vu qu'on a $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-a}{x-x_0} - b$, et comme on a $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, c'est qu'on a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-a}{x-x_0} - b = 0$ et donc en ajoutant b :
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-a}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b.$ □

1.2.3 Dérivabilité en x_0

Définition 1.17 Soit f une fonction définie en x_0 et au voisinage de x_0. Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f entre x_0 et x le nombre

$$T_{f,x_0,x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Remarque : Il est évident que $T_{f,x_0,x} = T_{f,x,x_0}$.

Lorsque ce taux d'accroissement admet une limite réelle ℓ pour $x \to x_0$, on dit que f est *dérivable* en x_0. Cette limite réelle ℓ est alors le nombre dérivé de la fonction f en x_0, qu'on note $f'(x_0)$.
On a donc, lorsque f est dérivable en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Remarque : Tout d'abord, le taux d'accroissement T_{f,x,x_0} peut être considéré comme une fonction de x, dépendant du paramètre x_0. Cette fonction n'est pas définie en x_0, et la limite sur laquelle on discute dans cette situation est toujours une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Proposition 1.18 Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0.

Preuve Si f est une fonction dérivable en x_0, en posant $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$, il est clair que la fonction ε définie par $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ vérifie $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Réciproquement si f est une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, si on a donc $f(x) = a + b(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$, on a vu que $a = f(x_0)$ et $b = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-a}{x-x_0}$, donc le taux d'accroissement $T_{f,x_0,x}$ admet une limite réelle b pour $x \to x_0$, ce qui signifie exactement que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = b$. □

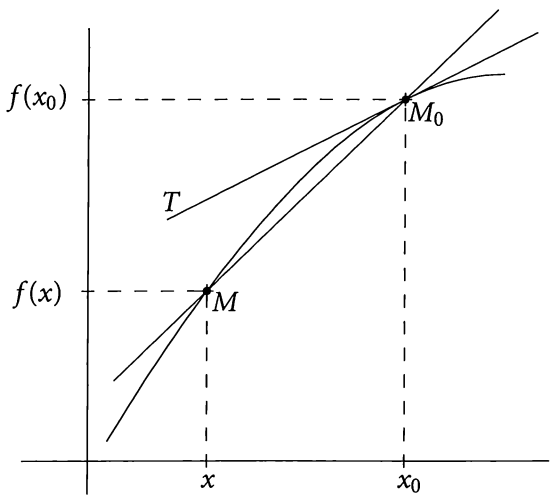
Corollaire 1.19 Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.

Preuve C'est évident puisqu'on a vu qu'une fonction f qui admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 est continue en x_0. □

1.2.4 Interprétation graphique

Soit f une fonction dérivable en x_0. On considère la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit M_0 le point de cette courbe ayant comme abscisse x_0 (fixé), et soit M le point de

la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant comme abscisse x (M est destiné à « bouger »). Les coordonnées de ces deux points sont donc respectivement $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$. La droite (M_0M) est ce qu'on appelle une sécante à la courbe. Son coefficient directeur est le taux d'accroissement $T_{f,x,x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, et lorsque x tend vers x_0, il est aisé de comprendre (ou d'admettre) que la droite (MM_0) passe toujours par M_0, et a son coefficient directeur qui tend vers la limite, pour $x \to x_0$, du coefficient directeur de (MM_0), c'est-à-dire exactement $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.



Cette droite T limite est la *tangente* à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse x_0 (c'est-à-dire en M_0). Cette tangente T a pour équation cartésienne

$$T : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

Remarquons, pour retenir cette formule, que le coefficient de x (le coefficient directeur de cette tangente) est bien $f'(x_0)$, et que si on remplace x par x_0, on trouve $y = f(x_0)$, ce qui signifie exactement que cette droite T passe par M_0.
Remarquons aussi que dans cette équation, le membre de droite n'est rien d'autre que la partie régulière du développement limité à l'ordre 1, au voisinage de x_0, de la fonction f. Bien entendu, ceci n'est valable qu'en un point x_0 où la fonction f est dérivable.

1.2.5 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Si la limite du taux d'accroissement n'existe que d'un seul côté (ou diffère selon le côté considéré), on est amené à parler de dérivabilité à droite ou à gauche :

Définition 1.20 Soit f une fonction définie en x_0 et à droite de x_0. On suppose que le taux d'accroissement T_{f,x,x_0} admet une limite à droite réelle ℓ pour $x \to x_0+$. Dans ce cas on dit

que f est dérivable à droite en x_0, et que cette limite ℓ est le nombre dérivé à droite de f en x_0, on note $\ell = f'_d(x_0)$.

On retiendra : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

On définit bien sûr de la même façon la dérivée à gauche d'une fonction, et le nombre dérivé à gauche $f'_g(x_0)$ de la fonction f en x_0.
Comme conséquence immédiate du lien entre les limites et les limites à droite et à gauche, on a la proposition suivante :

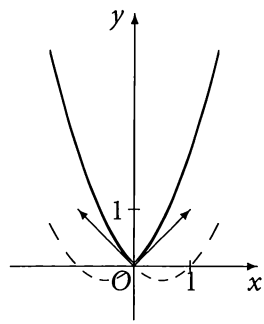
Proposition 1.21 Soit f une fonction définie en x_0 et au voisinage de x_0. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si on a simultanément :
- f est dérivable à droite en x_0 ;
- f est dérivable à gauche en x_0 ;
- $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

En particulier, une fonction dérivable à droite et à gauche en x_0, mais telle que les dérivées à droite et à gauche $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ sont différentes est une fonction non dérivable en x_0. Graphiquement, la courbe d'une fonction dérivable à droite en x_0 admet en son point d'abscisse x_0 une demi-tangente à droite de coefficient directeur $f'_d(x_0)$, et si elle est dérivable à gauche en x_0, elle admet une demi-tangente à gauche de coefficient directeur $f'_g(x_0)$. Ces deux demi-tangentes (qu'on représente comme des demi-droites d'extrémité $M_0(x_0, f(x_0))$) mises bout à bout forment une droite lorsque leurs coefficients directeurs sont identiques. Dans le cas contraire, on est en présence d'un point anguleux, et la courbe de f n'admet pas de tangente en M_0.

Exemple : Étudions la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \longmapsto |x|$.
Pour cela on doit étudier la limite en 0 du taux d'accroissement
$T_{f,0,x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x| - |0|}{x} = \dfrac{|x|}{x}$.
On sépare très naturellement l'étude en deux cas, pour pouvoir « ôter la valeur absolue » :
Si $x > 0$, on a $|x| = x$ donc $T_{f,0,x} = \dfrac{x}{x} = 1$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. La fonction f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.
Si $x < 0$, on a $|x| = -x$ donc $T_{f,0,x} = \dfrac{-x}{x} = -1$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$. La fonction f est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.
Puisque $1 \neq -1$, on a $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Il est bien connu que la représentation graphique de cette fonction valeur absolue présente à l'origine un point anguleux ; c'est la réunion de deux demi-droites, bissectrices du repère. Mais on peut ne pas être convaincu par cet exemple quant à la propriété des demi-tangentes annoncée plus haut, car ici ces demi-tangentes coïncident avec la courbe.

Voyons un autre exemple.

Exemple : Étudions la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \longmapsto x^2 + |x|$. (Remarquons tout d'abord qu'ici aussi on a $f(0) = 0$.)
Pour étudier cette dérivabilité, on doit étudier la limite en 0 du taux d'accroissement $T_{f,0,x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2+|x|-|0|}{x} = \dfrac{|x|}{x}$.
On sépare ici aussi l'étude en deux cas, pour pouvoir « ôter la valeur absolue » :
Si $x > 0$, on a $|x| = x$ donc $T_{f,0,x} = \dfrac{x^2+x}{x} = \dfrac{x+1}{1} = x+1 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 1$, et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} =$ 1. La fonction f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.
Si $x < 0$, on a $|x| = -x$ donc $T_{f,0,x} = \dfrac{x^2-x}{x} = x-1 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} -1$, et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$.
La fonction f est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.
Puisque $1 \neq -1$, on a $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

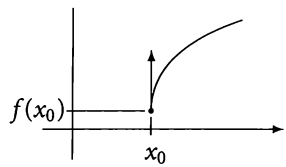


Voici la représentation graphique de cette fonction f (elle coïncide avec la parabole $y = x^2 + x$ pour $x \geqslant 0$ et avec la parabole $y = x^2 - x$ pour $x \leqslant 0$). On voit bien sur cet exemple les deux demi-tangentes (symbolisées par les flèches) qui ne sont pas « bout à bout ».

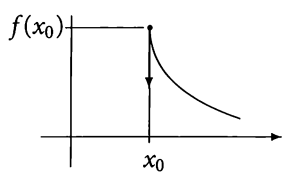
1.2.6 Tangentes verticales

En pratique, on a assez rarement des tangentes verticales complètes, on a plus souvent des demi-tangentes verticales.
Lorsque le taux d'accroissement $T_{f,x_0,x}$ d'une fonction f admet, pour $x \to x_0+$ ou pour $x \to x_0-$, une limite infinie, en application de la proposition précédente 1.21, cette fonction ne peut pas être dérivable. Le coefficient directeur de la tangente tend vers l'infini, ce qui fait que la position limite de la droite (M_0M), pour $x \to x_0$ (par valeurs supérieures ou inférieures), est la droite verticale qui passe par M_0, (d'équation $x = x_0$).
On dit dans cette situation que la courbe de f admet une demi-tangente verticale en son point d'abscisse x_0.
Nous allons préciser les quatre cas de figures qu'on peut obtenir, car en particulier pour les demi-tangentes à gauche, il y a un petit piège.

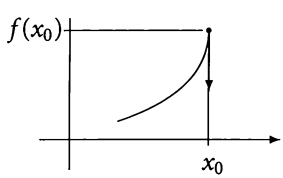
- Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, la courbe de f admet en son point d'abscisse x_0 une demi-tangente à droite tournée vers le haut, et l'aspect de la courbe est le suivant :



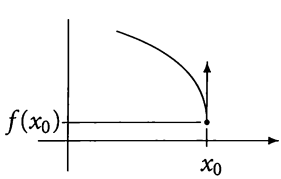
- Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$, la courbe de f admet en son point d'abscisse x_0 une demi-tangente à droite tournée vers le bas, et l'aspect de la courbe est le suivant :



- Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, la courbe de f admet en son point d'abscisse x_0 une demi-tangente à gauche tournée **vers le bas**, et l'aspect de la courbe est le suivant :



- Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$, la courbe de f admet en son point d'abscisse x_0 une demi-tangente à gauche tournée **vers le haut**, et l'aspect de la courbe est le suivant :



1.2.7 Fonctions dérivables

Une fonction qui est dérivable en tout point d'un intervalle I (ou d'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ qui est une réunion d'intervalles) est dite dérivable sur I. Lorsqu'on dit qu'une fonction est dérivable, cela signifie qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition.
Lorsque f est dérivable sur I, en tout $x_0 \in I$ on peut calculer le nombre dérivé $f'(x_0)$, on définit ainsi une fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$ qui est la fonction dérivée de f.
La plupart des fonctions usuelles sont dérivables. Il y a deux exceptions importantes : la fonction valeur absolue (que nous avons étudiée plus haut), et la fonction racine carrée.

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, on peut montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, mais elle n'est pas dérivable en 0 (c'est d'ailleurs en 0+ qu'on se place, l'étude de la dérivabilité à gauche de f en 0 n'ayant pas de sens). Montrons-le : On doit étudier la limite, pour $x \to 0+$, de $T_{f,0,x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (on peut simplifier cette fraction par $\sqrt{x}$ car on calcule ce taux d'accroissement pour $x > 0$). Comme il est clair que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0+$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, ce qui prouve bien que f n'est pas dérivable à droite en 0, (et de plus on en déduit que la courbe de $x \longmapsto \sqrt{x}$ admet, en son point d'abscisse nulle, une demi-tangente verticale à droite, tournée vers le haut.

En revanche, il est bien connu que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que sa fonction dérivée vérifie $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; on remarque que cette expression n'est pas définie pour $x = 0$, ce qui confirme ce qu'on vient de démontrer, mais ne le prouvait pas. Cependant, on verra au paragraphe suivant, qu'on peut quand même utiliser l'expression de la dérivée pour prouver la non dérivabilité d'une fonction en un point.

1.2.8 Opérations sur les fonctions dérivables

On a la propriété suivante :

Proposition 1.22 Si f et g sont deux fonctions dérivables, alors $f+g$ et fg sont des fonctions dérivables, et on a $(f+g)' = f'+g'$ et $(fg)' = f'g+fg'$. En particulier, si λ est une constante réelle, λf est aussi dérivable et on a $(\lambda f)' = \lambda f'$.

De même $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont des fonctions dérivables (forcément là où ces fonctions sont définies, donc pas là où g s'annule) et on a $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$.

Preuve Nous démontrons la dérivabilité du produit de deux fonctions dérivables, et la dérivabilité de l'inverse d'une fonction dérivable, les autres preuves sont « évidentes ».

- **Dérivabilité du produit**
  Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Montrons que fg est dérivable en x_0. On doit étudier la limite, pour $x \to x_0$, de $T_{fg,x_0,x} = \dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$; l'astuce est d'ajouter et de retrancher un terme « mixte », qui permet d'utiliser l'hypothèse :

$$T_{fg,x_0,x} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-g(x)f(x_0)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x) + f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0};$$

g est supposée dérivable en x_0, elle est donc continue en x_0, et on a $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Mais, par hypothèse $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$, donc en appliquant les règles d'opération sur les limites, on obtient

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

ce qui signifie exactement que la fonction fg est dérivable en x_0, et que son nombre dérivé $(fg)'(x_0)$ vaut

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\\ &= (f'g+fg')(x_0).\end{aligned}$$

- **Dérivabilité de l'inverse**
  Soit g une fonction dérivable en x_0. On suppose que $g(x_0) \neq 0$, ce qui implique, par continuité de g, que g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0. On veut montrer que $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0. Pour cela, on étudie la limite, pour $x \to x_0$, de

$$\begin{aligned}T_{\frac{1}{g},x_0,x} &= \frac{(\frac{1}{g})(x)-(\frac{1}{g})(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\,\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\end{aligned}$$

  En appliquant l'hypothèse de dérivabilité de g en x_0 (qui implique aussi sa continuité), on obtient immédiatement que $\lim_{x\to x_0} \frac{(\frac{1}{g})(x)-(\frac{1}{g})(x_0)}{x-x_0} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ d'où le résultat annoncé.

□

1.2.9 Fonctions dérivables de référence

Les fonctions usuelles (à part la fonction partie entière et la fonction racine carrée, déjà signalées) sont dérivables, leurs fonctions dérivées sont données dans les deux tableaux qui suivent.

$f(x)$	$f'(x)$ (commentaire)
$\lambda \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ pour $x>0$ si $\alpha\in\mathbb{R}$ pour $x\in\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$ pour $x\in\mathbb{R}^*$ si $\alpha\in\mathbb{Z}^{*-}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

1.2.10 Dérivation et composition de fonctions

Proposition 1.23 Soient f et g deux fonctions dérivables ; alors lorsque $f\circ g$ a un sens, c'est une fonction dérivable et on a $(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$.

En pratique, cette dernière formule se retient plutôt sous la forme

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Dans cette dernière formule, remarquons que $f'(g(x))$ n'a de sens que pour $g(x)$ appartenant à l'ensemble de définition de f (et donc de f'). C'est cohérent avec le fait que l'ensemble de définition de $f\circ g$ est formé des x qui sont tels que $g(x)$ existe ($x\in\mathcal{D}_g$) et surtout $g(x)\in\mathcal{D}_f$.
Une démonstration de ce résultat est assez simple à faire avec la notion de développement limité à l'ordre 1 :

Preuve Soit x_0 un réel appartenant à l'ensemble de définition de g, et tel que $g(x_0)$ appartient à l'ensemble de définition de f (pour que $(f\circ g)(x_0)$ existe).
Pour tout x dans un voisinage I de x_0, on a, puisque g est dérivable en x_0 :

$$g(x) = g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon_1(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to x_0}\varepsilon_1(x)=0; \tag{1.3}$$

D'autre part, puisque f est dérivable en $y_0=g(x_0)$, dans un voisinage J de y_0, on a :

$$f(y) = f(y_0)+f'(y_0)(y-y_0)+(y-y_0)\varepsilon_2(y) \qquad \text{avec } \lim_{y\to y_0}\varepsilon_1(y)=0; \tag{1.4}$$

Comme g est dérivable en x_0, elle est continue, et on est sûr que pour x suffisamment près de x_0, $y = g(x)$ est dans le voisinage J de y_0, et on peut écrire, en reportant dans l'équation (1.4) la valeur de $y = g(x)$ obtenue dans l'équation (1.3), qui nous donne entre autres : $y - y_0 = g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x)$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + \big(f'(g(x_0)) + \varepsilon_2(g(x))\big)\big[(g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x))\big] \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_3(x) = f'(g(x_0))\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(g(x))(g'(x_0) + \varepsilon_1(x))$$

Sous cette forme il est clair que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_3(x) = 0$ (en particulier parce que $g(x) = y \to y_0$ lorsque $x \to x_0$, par continuité de g, donc on a bien $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(g(x)) = 0$, par composition de limites)
Donc $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0, ce qui prouve que $g \circ f$ est dérivable en x_0 et que sa dérivée est $(g \circ f)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

Dérivées de fonctions composées usuelles

Dans le tableau qui suit, u désigne une fonction, et donc $f(u) = f \circ u$ est aussi une fonction. On peut appliquer les formules qui suivent pour tout x de l'ensemble de dérivabilité des fonctions concernées. Par exemple la première formule donnant la dérivée de u^α signifie que si $f(x) = \big(u(x)\big)^\alpha$, alors $f'(x) = \big(u(x)\big)^{\alpha-1} u'(x)$. Chacune des formules qui suit n'est bien sûr valable que dans le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions concernées.

$f(u) = f \circ u$	$(f(u))' = (f \circ u)'$	$f(u) = f \circ u$	$(f(u))' = (f \circ u)'$
u^α	$\alpha u^{\alpha-1} u'$	$\ln \lvert u \rvert$	$\dfrac{u'}{u}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(x > 0)$	$\sin u$	$u' \cos u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$ $(x \neq 0)$	$\cos u$	$-u' \sin u$
e^u	$u' \mathrm{e}^u$	$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

Comme pour la continuité, toute fonction définie à partir d'une seule expression ne contenant que des sommes, différences, produits, quotients ou compositions de fonctions dérivables est dérivable, mais évidemment la dérivée d'une fonction fabriquée avec une expression un peu compliquée est souvent encore plus difficile à expliciter.

1.2.11 Dérivées successives

Si une fonction f est dérivable, sa dérivée est une fonction f'. Rien n'empêche que cette fonction dérivée soit à son tour dérivable, et admette donc elle aussi une fonction dérivée, qui est alors la dérivée seconde de f, notée $f'' = (f')'$. La dérivée seconde est la dérivée d'ordre 2 de la fonction f, on la note aussi $f^{(2)} = f''$ (ne pas oublier les parenthèses autour de l'exposant, sinon il s'agit du carré $f \times f$ de la fonction f) (il est recommandé de lire « f dérivée 2 fois ».)

De même, on peut définir la dérivée troisième (d'ordre 3) qui est la dérivée de la dérivée seconde, et par récurrence immédiate, la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque, par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ (on lira ceci : « f dérivée n fois est la dérivée de (f dérivée $n-1$ fois) »). On convient que la dérivée d'ordre 1 est la dérivée ordinaire : $f^{(1)} = f'$ (lire « f dérivée une fois ») et que la dérivée $f^{(0)}$ d'ordre 0 est la fonction f dérivée zéro fois, c'est-à-dire non dérivée, donc $f^{(0)} = f$.

Ces deux dernières conventions sont importantes lorsqu'on dérive plusieurs fois un produit : on a en effet le résultat suivant :

Proposition 1.24 (Formule de Leibnitz) Soient f et g deux fonctions n fois dérivables. Alors la fonction fg est aussi n fois dérivable et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Attention, cette formule est difficile à appliquer à cause de la fausse analogie avec la formule du binôme, dans laquelle les premiers et derniers termes ont la particularité de ne contenir qu'une seule des deux variables. Ici f et g apparaissent dans *tous* les termes. Par exemple pour $n = 2$, on a $(fg)^{(2)} = \binom{2}{0} f^{(2)} g^{(0)} + \binom{2}{1} f^{(1)} g^{(1)} + \binom{2}{2} f^{(0)} g^{(2)}$, ce qui s'écrit de manière simplifiée $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$, mais le deuxième membre n'est certainement pas $f'' + 2f'g' + g''$ comme on le rencontre sur de nombreuses copies d'étudiants inattentifs. $g^{(0)}$ vaut g, et pas 1, contrairement à g^0.

Preuve Il suffit de raisonner par récurrence sur n, et d'appliquer au bon moment la formule $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, comme dans la démonstration de la formule du binôme. □

Pour finir, une définition que nous utiliserons souvent :

Définition 1.25 Une fonction f est dite de classe C^n lorsqu'elle est dérivable n fois, et que sa dérivée n-ième est continue.

Remarquons que puisque la dérivabilité implique la continuité, on peut en déduire que toutes les dérivées d'ordre k avec $1 \leqslant k < n$ sont elles aussi continues.

1.3 Développement limité d'une fonction au voisinage de 0

1.3.1 Présentation

Nous généralisons la notion de développement limité à l'ordre 1 qui nous a servi à introduire la dérivabilité :

Définition 1.26 Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 (nous noterons, en abrégé, un d.l.$_0(n)$) si l'on peut écrire pour tout x :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ est un polynôme de degré $\leqslant n$; c'est la *partie régulière* du développement limité.

La détermination d'un développement limité à l'ordre n d'une fonction f au voisinage de 0 permet donc d'en donner une approximation polynômiale de degré $\leqslant n$.

Remarque : Pour tout polynôme $A(x)$ de degré $\leqslant n$, on peut poser $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-A(x)}{x^n}$ et on a $f(x) = A(x) + x^n\varepsilon(x)$. Comme pour les développements limités à l'ordre 1, c'est seulement si $\varepsilon(x)$ tend vers 0 que $A(x)$ est la partie régulière d'un développement limité de f au voisinage de 0.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (remarquons qu'elle est bien définie au voisinage de 0, elle est définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ qui contient 0).
Partons de l'identité « bien connue » : $1-x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$
(si on préfère, on part de la formule qui donne la somme des termes d'une suite géométrique : $1+x+x^2+\cdots+x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$)
On en déduit que $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.
En posant $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$, on a $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ et $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)$
Nous avons trouvé (pour tout n) un développement limité à l'ordre n de cette fonction f au voisinage de 0.

Remarque : On a vu que la dérivabilité d'une fonction en 0 équivaut à l'existence d'un d.l.$_0(1)$; de même, il est évident que la continuité est équivalente à l'existence d'un développement limité à l'ordre 0.

On ne peut pas généraliser cette remarque pour des ordres supérieurs, mais néanmoins on admettra le résultat suivant :

Proposition 1.27 (Formule de Taylor-Young) Si f est une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0 ; alors la fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, qui est :

$$(1.5)\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

1.3.2 Propriétés des développements limités

Proposition 1.28 (Troncature) Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On suppose que f admet un d.l.$_0(n)$. Alors pour tout $n' < n$, f admet aussi un d.l.$_0(n')$ et on obtient la partie régulière du d.l.$_0(n')$ en « tronquant » celle du d.l.$_0(n)$, c'est-à-dire en n'en gardant que les termes de degré $\leqslant n'$.

Preuve Supposons que $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. On peut écrire, puisque $n' < n$

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n'}x^{n'}+a_{n'+1}x^{n'+1}+\cdots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)\\&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n'}x^{n'}+x^{n'}\left(a_{n'+1}x+\cdots+a_nx^{n-n'}+x^{n-n'}\varepsilon(x)\right)\\&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n'}x^{n'}+x^{n'}\varepsilon_1(x)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(x)=a_{n'+1}x+\cdots+a_nx^{n-n'}+x^{n-n'}\varepsilon(x)$ et clairement $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$. □

Proposition 1.29 (unicité du d.l.) Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.

Preuve Si f admet deux d.l.$_0(n)$, on a par exemple $f(x)=A(x)+x^n\varepsilon_1(x)$ et $f(x)=B(x)+x^n\varepsilon_2(x)$, avec $A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ et $B(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ et $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x)=0$, on obtient, en faisant la différence de ces deux égalités, $0=A(x)-B(x)+x^n\varepsilon_3(x)$, avec $\varepsilon_3(x)=\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)=\dfrac{B(x)-A(x)}{x^n}$; on devrait avoir $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0$; mais si $A(x)$ et $B(x)$ étaient différents, soit k le plus petit indice tel que $a_k\neq b_k$, alors on aurait $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{b_k-a_k}{x^{n-k}}\neq 0$ (cette limite est soit réelle non nulle pour $k=n$, soit infinie pour $k<n$). □

La partie régulière d'un développement limité ne dépend donc pas de la manière dont on l'obtient.

Par exemple, la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ est de classe C^n pour tout n, on pourrait donc obtenir son d.l.$_0(n)$ grâce à la formule de Taylor-Young, et on obtiendrait

$$\frac{1}{1-x}=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

En comparant avec ce qu'on a obtenu par un calcul direct :

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

on est sûr [5], sans avoir calculé $f^{(k)}(x)$ pour tout k et pour tout x, que $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$, $f^{(3)}(0)=3!$, et plus généralement $f^{(n)}(0)=n!$.

Proposition 1.30 (parité) Soit f une fonction définie au voisinage de 0, et admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière $A(x)$.
Alors, si f est une fonction paire, $A(x)$ est un polynôme pair (dont les termes non nuls sont tous de degré pair)
Si f est une fonction impaire, $A(x)$ est un polynôme impair (dont les termes non nuls sont tous de degré impair).

Preuve On a $f(x)=A(x)+x^n\varepsilon(x)$ donc $f(-x)=A(-x)+(-1)^n x^n\varepsilon(-x)$ donne un d.l.$_0(n)$ de la fonction $x\longmapsto f(-x)$, puisque clairement, si $\varepsilon'(x)=(-1)^n\varepsilon(-x)$, on a $\lim_{x\to 0}\varepsilon'(x)=0$.
Donc si f est paire, on obtient ainsi deux expressions de son unique d.l.$_0(n)$, et en identifiant, on a $A(x)=A(-x)$, et A est une fonction polynôme paire.
Si f est impaire, on obtient aussi une deuxième expression du d.l.$_0(n)$ de f :
$f(x)=-A(-x)-x^n\varepsilon'(x)$ d'où par identification $A(x)=-A(-x)$ et A est impaire. □

1.3.3 Quelques développements limités de référence

Voici quelques d.l.$_0(n)$ à connaître. On les démontre par exemple grâce à la formule de Taylor-Young (proposition 1.27, p.24). Dans toutes ces formules ε est une fonction à chaque fois différente, mais toujours telle que $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+x^{2p+2}\varepsilon(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+x^{2p+2}\varepsilon(x)$$

[5] On montre par récurrence que $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ce qui confirme les valeurs de $f^{(n)}(0)$ obtenues directement.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^n\varepsilon(x)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + x^n\varepsilon(x)$$

On peut écrire plus simplement cette dernière formule :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + x^n\varepsilon(x)$$

car on peut définir $\binom{\alpha}{k}$ même si α n'est pas entier : pour cela, on n'utilisera certainement pas la formule avec des factorielles partout, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ qui n'est valable que pour $n \in \mathbb{N}$, mais

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}{k!},$$

formule qui est valable pour tout α réel, du moment que $k \in \mathbb{N}$.

1.3.4 Techniques de détermination de développements limités

Pour déterminer un développement limité d'une fonction qui n'est pas dans la courte liste ci-dessus, on utilise les règles de calcul usuelles et moins usuelles qu'on va décrire ci-dessous. Il faut garder à l'esprit dès le départ d'un calcul l'ordre du d.l. que l'on cherche, et travailler sur des d.l. suffisamment poussés pour ne pas faire d'erreur. Mais on ne doit pas non plus utiliser des d.l. à des ordres trop élevés, car si on peut toujours tronquer un d.l., rien ne sert de faire des calculs trop compliqués.

Dans tout ce qui suit, les fonctions ε, ε_i sont des fonctions qui tendent vers 0 en 0.

Les propriétés énoncées dans ce § sont soit évidentes soit admises. L'essentiel est de comprendre les techniques.

Changement de variable linéaire

On peut toujours appliquer le développement limité connu d'une fonction f au voisinage de 0 à la fonction $x \longmapsto f(\lambda x)$.

Exemple : Calculer un développement limité à l'ordre 3 de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = \sqrt[3]{1-2x}$.
On écrit $f_1(x) = (1-2x)^{\frac{1}{3}} = (1+u)^{\frac{1}{3}}$ avec $u = -2x$. On applique la formule du développement limité de $(1+x)^\alpha$ (avec $\alpha = \frac{1}{3}$) :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + \frac{1}{3}u + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}u^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}u^3 + u^3\varepsilon(u) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-2x) + \frac{1(-2)}{3\times 3\times 2}(-2x)^2 + \frac{1(-2)(-5)}{3\times 3\times 3\times 6}(-2x)^3 + x^3(-8\varepsilon(-2x)) \\ f_1(x) &= 1 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{81}x^3 + x^3\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

(on a posé $\varepsilon_1(x) = -8\varepsilon(-2x)$.)

Linéarité des développements limités

On peut additionner, multiplier par une constante des développements limités sans difficulté.

Exemple : Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = 3\sqrt[3]{1-2x} + e^x$:
On récupère le résultat qu'on vient d'obtenir, puisque $f_2 = 3f_1 + \exp$, on a

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 3(1 - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{4}{9}x^2 - \tfrac{40}{81}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)) + 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= (3+1) + (-2+1)x + (-\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{2})x^2 + (-\tfrac{40}{27} + \tfrac{1}{6})x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \\ f_2(x) &= 4 - x - \frac{5}{6}x^2 - \frac{71}{54}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

Multiplication de deux développements limités

On peut multiplier deux développements limités au même ordre, il suffit de tronquer en cours de calcul et ne garder que les termes de degré $\leqslant$ à l'ordre souhaité.

Exemple : Déterminer le d.l.$_0(3)$ de f_3 définie par $f_3(x) = e^x\sqrt{1+x}$
On écrit simplement $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et
$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + x^3\varepsilon'(x)$ donc

$$\begin{aligned} f_3(x) &= (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x))(1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon'(x)) \\ &= 1 + (1 + \tfrac{1}{2})x + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8})x^2 + (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16})x^3 + x^3\varepsilon_3(x) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + x^3\varepsilon_3(x). \end{aligned}$$

Quotient de développements limités

Si on connaît un développement limité de f et un développement limité de g, on peut obtenir un développement limité de $\frac{f}{g}$ en faisant une *division selon les puissances croissantes.*

Il faut que $g(0) \neq 0$ (pour que $\frac{f}{g}$ soit définie au voisinage de 0.)

Exemple : Déterminer le développement limité à l'ordre 6 de $\tan x$ (au voisinage de 0).

On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_1(x)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ (nous verrons que le terme en x^6 ne sert à rien).

$$
\begin{array}{l|l}
x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\
\hline
-\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 \right) & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
\hline
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & \\
-\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 \right) & \\
\hline
\frac{2}{15}x^5 &
\end{array}
$$

$\frac{1}{120} - \frac{1}{24} = \frac{1-5}{120} = -\frac{4}{120} = -\frac{1}{30}$

$-\frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{-1+5}{30} = +\frac{4}{30} = +\frac{2}{15}$

On peut donc conclure que $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x)$.

Composition de développements limités

Si f admet un d.l.$_0$ et u est une fonction qui admet un d.l. **et qui tend vers** 0, on peut composer les développements limités.

Exemple :

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f définie par $f(x) = \ln\cos x$.

On écrit $f(x) = \ln(1+u)$ avec $u = \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^5\varepsilon_1(x)$.

Or, $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + u^2\varepsilon_2(u)$, (inutile d'aller plus loin, les termes suivants ne feraient apparaître que des puissances de x d'ordre $\geqslant 6$), on calcule $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon_3(x)$ et donc $-\frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{8}x^4 + x^4\varepsilon_4(x)$. On en déduit que

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + x^4\varepsilon_5(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon_5(x)$.

Ceci est un développement limité de f *à l'ordre* 4. Or, on cherche le développement limité *à l'ordre* 5 de f. Mais $f : x \longmapsto \ln\cos x$ est une fonction paire. La partie régulière

de son d.l.$_0(5)$ est donc un polynôme pair, qui n'a pas de terme en x^5. Le d.l.$_0(5)$ de f a donc la même partie régulière que son d.l.$_0(4)$. On peut donc conclure : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x^5\varepsilon(x)$.

1.3.5 Développement limité au voisinage de x_0

Pour traiter un développement limité au voisinage de x_0, il suffit de se ramener en 0 en posant $x = x_0 + h$, car lorsque x est au voisinage de x_0, alors h est au voisinage de 0. On peut aussi obtenir directement une tel d.l.$_{x_0}(n)$ avec la formule de Taylor-Young, énoncée en x_0, mais ce peut être plus long car on est alors obligé de calculer les dérivées successives de la fonction.
Nous admettrons :

Proposition 1.31 (Formule de Taylor-Young en x_0) Soit f est une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0 ; alors la fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, qui est :

$$(1.6)\quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Exemple : Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction cos au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
On écrit

$$\begin{aligned}\cos(\frac{\pi}{3}+h) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos h - \sin\frac{\pi}{3}\sin h \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + h^3\varepsilon_1(h)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon_2(h)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + h^3\varepsilon(h)\end{aligned}$$

On peut écrire ce développement limité de la fonction cos au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ sous la forme

$$\cos x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\tfrac{\pi}{3}) - \tfrac{1}{4}(x-\tfrac{\pi}{3})^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{12}(x-\tfrac{\pi}{3})^3 + (x-\tfrac{\pi}{3})^3\varepsilon'(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \varepsilon'(x) = 0$ (avec $\varepsilon'(x) = \varepsilon(x-\frac{\pi}{3})$).
On aurait pu obtenir ce même résultat tout aussi facilement avec la formule de Taylor-Young, car ici, les dérivées successives de la fonction cos sont faciles à calculer.

Application à un calcul de limite

Soit à calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$

Remarquons tout d'abord qu'on est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».
On écrit un développement limité (à l'ordre 2) du numérateur et du dénominateur de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$:

$$\sin 3x = \sin 3(\frac{\pi}{3}+h) = \sin(\pi+3h) = -\sin 3h = -3h + h^2\varepsilon_3(h).$$

On a vu que

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{3}+h) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + h^3\varepsilon(h) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + h^2\varepsilon_4(h)$$

(en tronquant), donc on a :

$$1-2\cos x = 1-2\cos(\frac{\pi}{3}+h) = 1-(1-\sqrt{3}h-\frac{1}{2}h^2) + h^2\varepsilon_5(h) = \sqrt{3}h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon_6(h).$$

On a donc

$$f(x) = f(\frac{\pi}{3}+h) = \frac{-3h+h^2\varepsilon_3(h)}{\sqrt{3}h+\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_6(h)} = \frac{-3+h\varepsilon_3(h)}{\sqrt{3}+\frac{1}{2}h^+h\varepsilon_6(h)} \xrightarrow[h\to 0]{(x\to\frac{\pi}{3})} -\sqrt{3}.$$

On remarque qu'en fait, un d.l. à l'ordre 1 aurait suffi pour résoudre ce problème.

1.3.6 Développement asymptotique d'une fonction au voisinage de l'infini

Lorsqu'on est au voisinage de l'infini, on ne parle plus de développement limité, mais de développement asymptotique. La méthode pour déterminer un développement asymptotique est analogue à celle utilisée pour le d.l.$_{x_0}$: on se ramène en 0 en posant (par exemple) $h = \frac{1}{x}$ et donc $x = \frac{1}{h}$. Pour $x \to \pm\infty$, on a $h \to 0$.
Ces développements asymptotiques peuvent être utiles pour déterminer le comportement d'une fonction au voisinage de l'infini, pour déterminer d'éventuelles asymptotes horizontales ou obliques, et pour déterminer la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote.

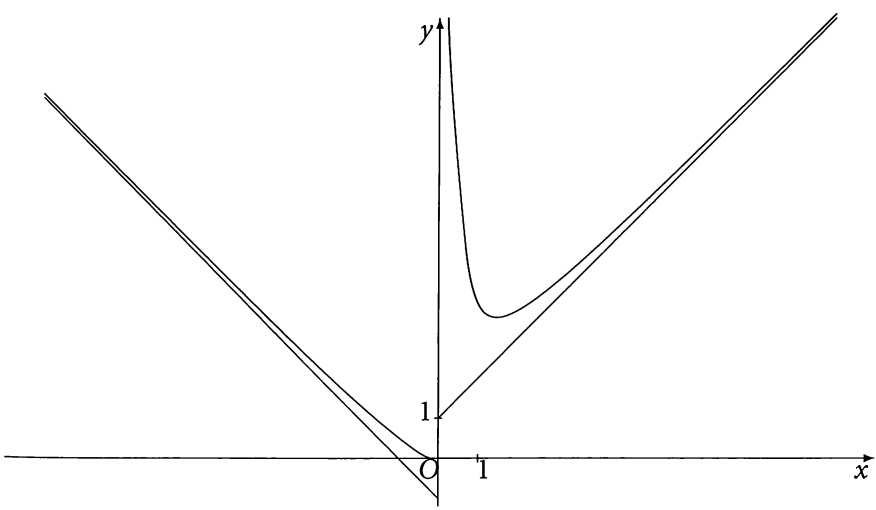
Exemple :
Déterminer le comportement à l'infini de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$.
On pose $x = \frac{1}{h}$, et on a donc

$$f(x) = f(\frac{1}{h}) = \mathrm{e}^h\sqrt{1+\frac{1}{h^2}} = \mathrm{e}^h\frac{\sqrt{h^2+1}}{\sqrt{h^2}} = \frac{1}{|h|}\mathrm{e}^h\sqrt{1+h^2}$$

On connaît le développement limité (à l'ordre 2, cela suffit, en général) au voisinage de 0 de la fonction exp et on sait déterminer celui de $h \longmapsto \sqrt{1+h^2}$.

$$\begin{aligned} e^h &= 1+h+\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_1(h) \\ \sqrt{1+h^2} &= 1+\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_2(h) \qquad \text{donc} \\ f(x) &= \frac{1}{|h|}\left(1+h+\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_1(h)\right)\left(1+\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_2(h)\right) \\ &= \frac{1}{|h|}\left(1+h+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_3(h)\right) = \frac{1}{|h|}(1+h+h^2+h^2\varepsilon_3(h)) \end{aligned}$$

Pour $x \to +\infty$, on a $h > 0$, donc
$f(x) = \frac{1}{h}+1+h+h\varepsilon_3(h) = x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$
On en déduit que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe de f, et la courbe de f est au-dessus de son asymptote (en tout cas pour x assez grand pour que $|\varepsilon(x)| < 1$, ce qui permet d'être sûr que $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x) > 0$.)
De même, pour $x \to -\infty$, on a $h < 0$ donc
$f(x) = -\frac{1}{h}-1-h-h\varepsilon_3(h) = -x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon'(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \varepsilon'(x) = 0$.
La droite d'équation $y = -x-1$ est donc asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$, et la courbe de f est au-dessus de cette asymptote (car $-\frac{1}{x} > 0$) pour les x négatifs tels que $|x|$ est suffisamment grand pour que $|\varepsilon'(x)| < 1$, ce qui assure que $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon'(x) > 0$.
Aspect de la courbe de f, et de ses asymptotes obliques :



1.4 Exercices

Exercice 1.1.
Déterminer les limites suivantes (si elles existent) (le cas échéant, distinguer la limite à droite et la limite à gauche) :

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5} \quad ; \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5} \quad ; \quad \text{c) } \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{x^2-6x+5}$$

$$\text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \quad ; \quad \text{e) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \quad ; \quad \text{f) } \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$$

$$\text{g) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad ; \quad \text{h) } \lim_{x\to 0} x\ln(x+x^2) \quad ; \quad \text{i) } \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+x^2)}$$

$$\text{j) } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^3+2} \quad ; \quad \text{k) } \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(x) \quad ; \quad \text{l) } \lim_{x\to-\infty} e^{x}\ln(x)$$

$$\text{m) } \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \text{n) } \lim_{x\to 0} \ln(x)\ln(x+1) \quad ; \quad \text{o) } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$$

$$\text{p) } \lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1} \quad ; \quad \text{q) } \lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-3)}{x-1} \quad ; \quad \text{r) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x-3)}{x-1}$$

$$\text{s) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} \quad ; \quad \text{t) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} \quad ; \quad \text{u) } \lim_{x\to \pi} \frac{e^x-1}{\sin x}$$

$$\text{v) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \quad ; \quad \text{w) } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \quad ; \quad \text{x) } \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x-\sqrt{3}}{2\sin x-1}$$

Exercice 1.2. Soit x un nombre réel. La partie entière de x est l'entier noté $\mathrm{E}(x)$ tel que :

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1.$$

1. Préciser $\lim_{x\to x_0} \mathrm{E}(x)$ suivant que x_0 soit entier ou non, et en distinguant éventuellement limite à gauche et limite à droite. En quels points la fonction E est-elle continue ? discontinue ? Dessiner la courbe représentant cette fonction.
2. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - \mathrm{E}(x).$$

En quels points, cette fonction est-elle continue ? discontinue ? Montrer que cette fonction est périodique de période 1. Dessiner la courbe représentant cette fonction.

3. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \mathrm{E}(x) - x + (x-\mathrm{E}(x))^2.$$

En quels points, cette fonction est-elle continue ? discontinue ? Montrer que cette fonction est périodique de période 1. Dessiner la courbe représentant cette fonction.

Exercice 1.3. On considère la fonction : $f : x \longmapsto |x^2 - 1|$.
f est-elle dérivable en $x = -1$? $x = 0$? $x = 1$? f est-elle continue en ces mêmes points ?

Exercice 1.4. On considère la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1+\cos(x)}{1-\sin(x)}$.
Pourquoi est-elle dérivable sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$?
Déterminer sa dérivée.

Exercice 1.5. Soit n un entier, $n \geqslant 1$.
On considère la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{x^{n+1} + x^n}$.

1. Étudier la dérivabilité de cette fonction en $x = 0$.
2. Calculer sa dérivée pour $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 1.6. Déterminer les dérivées des fonctions f définies par les formules suivantes :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$; b) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \sin x + 1}{2\sin^2 x - 1}$; c) $f(x) = \sin(\ln x)$

d) $f(x) = \ln(\sin x)$; e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}}$; f) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Exercice 1.7. Calculer les dérivées n-ièmes (pour $n \in \mathbb{N}^*$) des fonctions f définies par les formules :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; b) $f(x) = x^2(1+x)^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$

c) $f(x) = \sin x$; d) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$

Exercice 1.8. Soit n un entier $n \geqslant 1$. On pose :

$$S_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} \quad \text{et} \quad T_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n.$$

1. Montrer que la dérivée de T_n est S_n.
2. Montrer, si $x \neq 1$, la formule : $T_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - x}{x - 1}$.
3. En déduire, si $x \neq 1$, la formule :

$$S_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Exercice 1.9. Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

1. Quelle est la dérivée n-ième de la fonction f ?
2. Écrire la formule de Taylor-Young pour cette fonction, à l'ordre n, au voisinage d'un point x_0.
3. Donner le d.l.$_0(n)$ de f.

Exercice 1.10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$
En utilisant la factorisation classique :
$1-X^n = (1-X)(1+X+X^2+\cdots+X^{n-2}+X^{n-1})$ avec $X = 3x$, montrer que f admet un d.l.$_0(n)$.

Exercice 1.11. Déterminer les développements limités des fonctions f suivantes, définies par l'expression de $f(x)$:

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ (à l'ordre 4 au voisinage de 0) ;
2. $f(x) = \sin 2x$ (à l'ordre 5 au voisinage de 0) ;
3. $f(x) = \ln(1-x^3)$ (à l'ordre 6 au voisinage de 0) ;
4. $f(x) = \sqrt{1-x}$ (à l'ordre 3 au voisinage de 0) ;

Exercice 1.12.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ au voisinage de -1.
2. Déterminer le développement limité de $f : x \longmapsto \cos x$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$.
3. Déterminer le développement limité de $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3+x}}$ au voisinage de 0, à l'ordre 2.

Exercice 1.13.

1. Déterminer le d.l.$_0(3)$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{9+x}\ln(1+3x)$.
2. Déterminer le d.l.$_0(4)$ de la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}$.
3. Déterminer le d.l.$_0(3)$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(2-x+x^2)$.
4. Déterminer le d.l.$_0(3)$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{(8-x)^2}$.

Exercice 1.14.

1. Déterminer, en vue de l'étude de ses branches infinies, un développement asymptotique à l'ordre 2, au voisinage de l'infini de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{(x+3)x}$.
2. Déterminer, en vue de l'étude de ses branches infinies, un développement asymptotique à l'ordre 2, au voisinage de l'infini de la fonction $f : x \longmapsto x\exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$.

Exercice 1.15. Déterminer à l'aide de développements limités les limites suivantes (si elles existent).

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-e^x}{x^2}$;
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8-x}-\sqrt{4-\frac{x}{3}}}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x^2}-\cos x}{x^2}$;
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\ln\cos 2x+\sin^2 2x}{x^4}$
5. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
6. $\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right]$
7. $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^x$;
8. $\lim_{x\to 0}\left[x-x^2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]$.

Exercice 1.16. Faire l'étude et la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}\sqrt{x^2-1}$.
On étudiera en particulier, à l'aide de développements asymptotiques en $+\infty$ et en $-\infty$, les deux branches infinies.

CHAPITRE 2

Étude de fonctions

L'étude des fonctions était traditionnellement une partie importante de l'analyse. Les moyens actuels de calcul rendent moins fondamentale la science des études de fonctions. En soi, ces études peuvent sembler un peu vaines, mais la panoplie des outils à maîtriser et à mettre en œuvre exige une bonne connaissance de l'analyse. En outre, il y a un plaisir esthétique à arriver à prévoir les caractéristiques d'une courbe, que l'on pourra ensuite vérifier grâce aux calculatrices ou outils graphiques des ordinateurs.

2.1 Plan d'étude d'une fonction

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par la donnée d'une expression $f(x) = \ldots$
(à la place des points de suspension se trouve une expression mathématique dans laquelle la variable x apparaît).
Étudier cette fonction va consister à :

- préciser son ensemble de définition ;
- détecter et étudier d'éventuels points de non-continuité ou de non-dérivabilité ;
- déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition ;
- détecter la présence de branches infinies et étudier ces branches infinies ;
- étudier les variations de f.
- déterminer les tangentes à la courbe pour tout point d'arrêt, point limite ou point de non-dérivabilité.
- enfin faire, dans un repère adapté à la situation, une représentation graphique de la courbe de f qui fait une synthèse des études précédentes.

Nous allons maintenant détailler les attentes pour chacun des points précédents.

2.2 Ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité

Inutile d'épiloguer sur la notion d'ensemble de définition. On doit être efficace et correct dans cette recherche. Se rappeler qu'un dénominateur ne doit pas être nul, qu'une quantité sous un radical $\sqrt{\ }$ doit être positive ou nulle, qu'on ne peut calculer le logarithme que des

quantités strictement positives. Il est souvent utile de se rappeler de la théorie du signe d'un trinôme...

En ce qui concerne la continuité et la dérivabilité, il n'est pas utile d'en parler lorsqu'il n'y a aucun problème, ce qui arrive dans la plupart des cas. Cependant, des points de non-continuité sont à redouter lorsque la fonction partie entière apparaît dans l'expression définissant $f(x)$ (c'est très rare), tandis que des points avec risque de non-dérivabilité risquent d'exister lorsque la fonction valeur absolue ou la fonction racine carrée (ou d'ailleurs toute fonction racine n-ième) sont utilisées dans l'expression de $f(x)$.

2.2.1 Réduction de l'ensemble d'étude

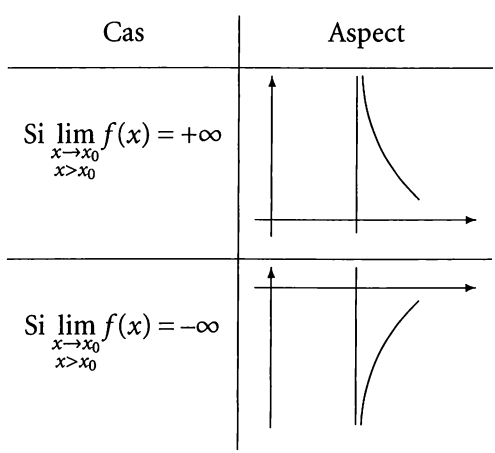
Lorsque la fonction est paire ou impaire, il est pertinent (mais facultatif) de n'étudier la fonction que sur $[0, +\infty[$ et de compléter ensuite la courbe par symétrie.
Lorsque la fonction est périodique, il est absolument indispensable de déterminer une période, et de n'étudier la fonction que sur une période.

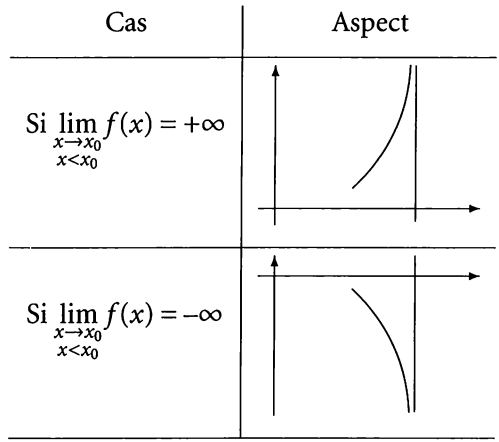
2.3 Limites et branches infinies

On doit chercher les limites de la fonction partout où l'ensemble de définition s'arrête. Il y a donc toujours au moins deux recherches de limites à faire (sauf parité). En certaines bornes réelles x_0 de l'ensemble de définition, lorsqu'il y a continuité de f en ces points, le calcul de limite se réduit au calcul de $f(x_0)$.

2.3.1 Asymptotes verticales

Lorsque la limite (à droite ou à gauche) de f en x_0 est infinie (lorsqu'on a $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$), la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$. L'aspect de la courbe dépend de la situation :



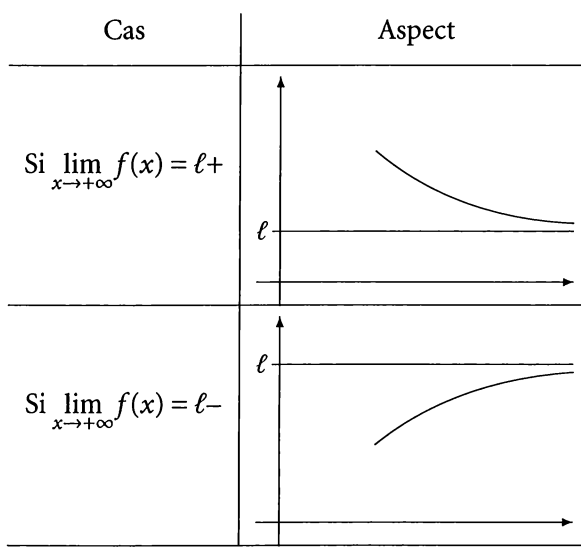


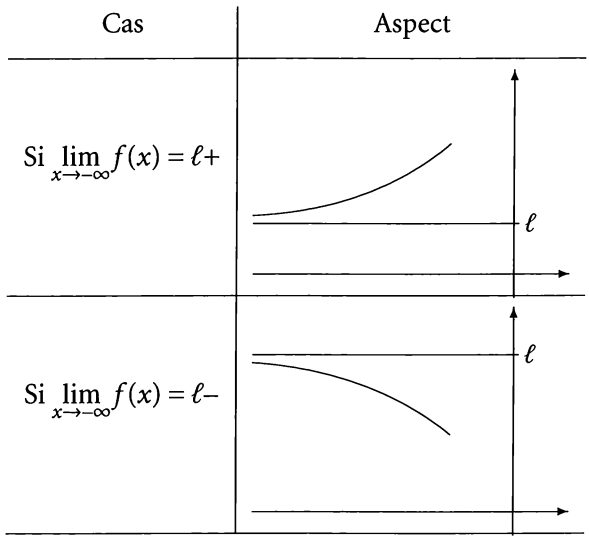
2.3.2 Asymptotes horizontales

Lorsque f admet une limite finie ℓ à l'infini, c'est-à-dire lorsque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, alors la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$. La position de la courbe par rapport à l'asymptote dépend du signe de $f(x) - \ell$ au voisinage de l'infini qu'on étudie.

On note $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell+$ [resp. $= \ell-$] lorsque $f(x) > \ell$ [resp. $f(x) < \ell$] dans un voisinage de l'infini où calcule cette limite.

L'aspect de la courbe dépend de la situation :





Un dernier cas, assez rare, peut arriver : c'est lorsque la limite en $\pm\infty$ est bien un réel ℓ, mais que la valeur de $f(x)$ passe une infinité de fois en dessous puis au-dessus de la valeur de ℓ. Un tel exemple se rencontrera dans l'exemple 9, p.112 et p.116.

2.3.3 Autres branches infinies

Lorsqu'on rencontre une limite infinie à l'infini, (lorsque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$), on essaie de déterminer la direction asymptotique de la courbe. La direction asymptotique est la direction que semble éventuellement prendre un point de la courbe lorsque son abscisse tend vers l'infini, lorsqu'on l'observe depuis l'origine du repère. Pour un point $M(x,f(x))$ de la courbe, on cherche donc la position limite, pour x tend vers l'infini, de la droite (OM). Comme cette droite passe toujours par l'origine O, la position de cette droite (OM) est caractérisée par son coefficient directeur $\dfrac{f(x)}{x}$, et c'est la limite de cette quantité que l'on étudie.

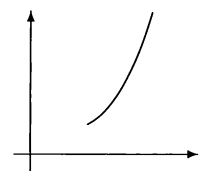
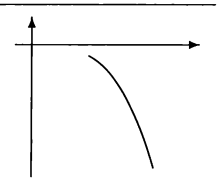
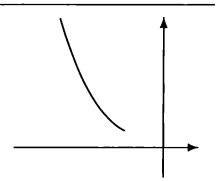
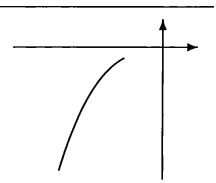
Attention : Dans tout ce qui suit, on a toujours $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ n'existe pas, la courbe n'admet pas de direction asymptotique au voisinage de cet infini.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, la courbe de f admet une *branche parabolique de direction asymptotique verticale.*

  Remarquons que le signe de l'infini que l'on obtient dans ce cas est entièrement déterminé, car on connaît le signe de $f(x)$ (selon que la limite de $f(x)$ est + ou – l'infini), et on connaît aussi le signe de x (puisqu'on étudie une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$).

  Un exemple important, puisque c'est de lui que l'on tire le nom (branche parabolique) de cette situation, est la fonction $x \longmapsto x^2$, dont la courbe est une parabole, et dont

les branches infinies sont bien des branches paraboliques, de direction asymptotique verticale (il est évident qu'on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$)
L'aspect d'une branche parabolique de direction asymptotique verticale, selon le cas est le suivant :

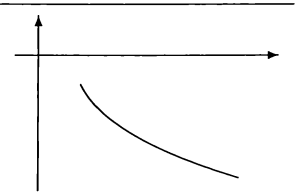
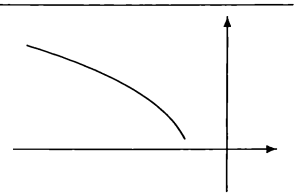
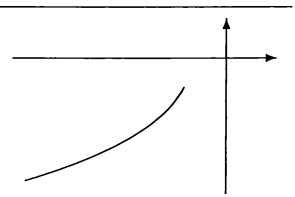
Cas	Aspect
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$	
Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \underline{-\infty}$	
Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \underline{+\infty}$	

Attention au signe de la limite infinie de $\frac{f(x)}{x}$ dans les deux derniers cas : lorsque cette limite est $+\infty$, la branche parabolique est quand même tournée *vers le bas*, à cause du fait que $x < 0$, penser à la fonction $x \longmapsto x^2$.

- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (toujours dans le cas où $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$) [1], alors la courbe de f admet une *branche parabolique de direction asymptotique horizontale.*
  Un exemple de référence de cette situation est la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, dont la courbe est

[1] Lorsque la limite de $f(x)$ n'est pas infinie, mais qu'on a $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, la courbe admet quand même une direction asymptotique horizontale. C'est en particulier le cas pour une fonction qui admet une asymptote horizontale : la direction asymptotique d'une courbe admettant une asymptote horizontale est évidemment horizontale. C'est aussi le cas pour une fonction qui n'aurait pas de limite pour $x \to \pm\infty$ comme la fonction $x \longmapsto \sin x$, par exemple (voir la courbe p.58)

une demi-parabole : on a bien $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$.
Voici, selon la situation, l'aspect de la courbe de f :

Cas	Aspect
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0+$	
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0-$	
Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0-$	
Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0+$	

Remarquons que dans cette situation aussi, on peut toujours déterminer le signe de $\frac{f(x)}{x}$, (puisqu'on sait si la limite est $+\infty$ ou $-\infty$, donc on connaît le signe de $f(x)$, et on connaît bien sûr le signe de x, selon qu'on calcule ces limites en $+\infty$ ou en $-\infty$) donc on peut toujours préciser que la limite est 0+ ou 0–, mais c'est anecdotique.

- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$
Alors la courbe de f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite $y = ax$. Attention, cela ne signifie en aucune façon que la droite d'équation $y = ax$ est asymptote à la courbe : cela signifie seulement qu'un observateur placé à l'origine du repère, aurait l'illusion que le point M, en s'éloignant, semble se rapprocher de la droite $y = ax$. Mais il existe différentes situations pouvant amener à cette situation : on peut avoir une asymptote oblique parallèle à cette droite $y = ax$, ou encore une branche

parabolique, ou enfin une branche infinie « bizarre », admettant simplement cette direction asymptotique oblique.

On étudie alors la limite de $f(x)-ax$, pour pouvoir préciser dans quelle situation on se trouve.

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$ n'existe pas, on ne peut rien dire de plus que le fait que la courbe de f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite d'équation $y = ax$.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax = b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f.

  Remarquons que si $\varepsilon(x) = f(x)-ax-b = f(x)-(ax+b)$, on a clairement, dans cette situation, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$, de sorte qu'on peut écrire $f(x) = ax+b+\varepsilon(x)$, et qu'on reconnaît ainsi la forme d'une fonction qui admet une asymptote oblique $y = ax+b$, comme on les étudie en Terminale.

  D'ailleurs, si pour une fonction f on peut directement trouver une façon de transformer l'écriture de $f(x)$ pour obtenir $f(x) = ax+b+\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$, on pourra conclure sans aucun calcul supplémentaire que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f (il n'est pas utile de calculer, dans cette situation, les limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (on trouverait bien sûr $\pm\infty$), ni $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (on trouverait bien sûr a), ni $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$ (on trouverait b).

  Quelle que soit la façon dont on a obtenu que la droite Δ : $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f, on doit ensuite essayer de déterminer la position relative de la courbe de f et de son asymptote Δ. Pour cela, il suffit d'étudier le signe de $\varepsilon(x) = f(x)-(ax+b) = (f(x)-ax)-b$. Bien entendu, $\varepsilon(x)$ est positif quand la courbe est au-dessus de l'asymptote...
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax = \pm\infty$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique oblique, celle de la droite $y = ax$. Cette branche parabolique est au dessous ou au dessus de la droite $y = ax$ selon le signe de $f(x)-ax$, donc selon que l'on obtient $-\infty$ ou $+\infty$ comme limite de cette quantité.

Autre méthode pour l'étude d'une branche infinie :

La méthode qui est souvent la plus efficace pour étudier une branche infinie consiste à utiliser un développement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$), comme signalé au chapitre précédent, en posant par exemple $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener en 0. Si on obtient un développement asymptotique du type :

$f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x^k}+\dfrac{1}{x^k}\varepsilon(x)$, $(k \in \mathbb{N}^*)$, avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$, on peut directement conclure :

- que la courbe de f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite d'équation $y = ax$

- que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f
- et on peut dire que $\Delta(x) = f(x) - (ax+b)$ est au voisinage de $\pm\infty$ du signe de $\frac{c}{x^k}$, ce qui fait qu'on connaît la position relative de la courbe de f et de son asymptote : au dessus lorsque $\Delta(x) > 0$, au dessous lorsque $\Delta(x) < 0$
  Attention ! en $+\infty$, c'est le signe de c qui suffit à déterminer la position relative, alors qu'en $-\infty$, il faut tenir compte de la parité de k.

Remarque : En pratique, le développement asymptotique que l'on obtient est presque toujours du type $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$ (c'est-à-dire que $k = 1$).

2.4 Tangentes particulières

On doit essayer de déterminer la tangente à la courbe en tous les points particuliers.
Comme points particuliers, on a :

- les points x_0 où la tangente est horizontale ($f'(x_0) = 0$, ces points ne sont pas difficiles à détecter) ;
- les points limites.
  Un point limite est une borne réelle x_0 de l'ensemble de définition, pour laquelle la limite $\lim_{x\to x_0\pm} f(x)$ est un réel ℓ. (En pratique, c'est presque toujours une limite à droite ou à gauche qu'on est amené à étudier en un tel point).
  Si ce point x_0 appartient à l'ensemble de définition, la fonction est continue à droite [ou à gauche] en ce point, et on étudie alors $f'(x_0)$ tout simplement, si f est dérivable à droite [ou à gauche] en x_0 ou, si f n'est pas dérivable en ce point, on étudie la limite du taux d'accroissement $T_{f,x,x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
  Si ce point x_0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f, puisque la limite de f est finie en ce point, on peut considérer le prolongement $\widehat{f}$ par continuité à droite en x_0 [ou à gauche] de f, (en posant $\widehat{f}(x_0) = \ell$ et $\widehat{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq x_0$) et étudier la dérivabilité de $\widehat{f}$ en x_0 en calculant la limite du taux d'accroissement $T_{\widehat{f},x,x_0} = \frac{\widehat{f}(x)-\widehat{f}(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-\ell}{x-x_0}$;
- les points de non-dérivabilité (ou les points où la dérivabilité est douteuse). Pour prouver la non dérivabilité de f en un tel point x_0, on étudie la limite (pour $x \to x_0$ ou $x \to x_0\pm$: en général, c'est toujours une limite à droite ou à gauche qu'on doit étudier dans ces cas) de $T_{f,x,x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Dans tous ces cas, si on obtient une limite finie pour le taux d'accroissement, la courbe de f admet en son point d'abscisse x_0 une tangente (ou plus souvent une demi-tangente) oblique, passant par $M_0(x_0, \widehat{f}(x_0))$, et de coefficient directeur égal à cette limite finie.
Si la limite du taux d'accroissement $T_{\widehat{f},x,x_0}$ est infinie, alors la courbe de f admet en son point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale.
Lorsque l'on doit déterminer la limite, pour $x \to x_0\pm$, du taux d'accroissement $T_{f,x,x_0} =$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, il peut être pratique, dans certains cas, d'utiliser le théorème suivant, que nous ne pouvons pas démontrer ici (sa démonstration utilise le théorème des accroissements finis).

Théorème 2.1 *Soit f une fonction définie à droite de x_0 et continue à droite en x_0 (éventuellement on utilise le prolongement par continuité à droite de f en x_0, en identifiant $f(x_0)$ à $\widehat{f}(x_0)$).*
On suppose que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f'(x) = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\})$
Alors on a aussi $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha$

Bien entendu le même résultat existe pour une limite à gauche.
Une première illustration de ce théorème peut être obtenue avec la fonction racine carrée en 0. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. On sait que pour $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On calcule aisément $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$. On peut donc en déduire que $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, et on a redémontré que cette fonction f n'est pas dérivable à droite en 0. (On a prouvé que $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$, ce que l'on savait déjà.)
Nous verrons à peine plus loin (§ 2.6, p.46) un autre exemple plus intéressant d'utilisation de cette propriété.

2.5 Variations

2.5.1 Étude des variations

L'étude des variations de la fonction f se base en pratique sur l'application du théorème bien connu suivant, qui lie les variations d'une fonction au signe de sa dérivée. Notons qu'il nous est aussi impossible de démontrer ce théorème dans le cadre de ce cours, car il nécessite le théorème des accroissements finis qui est vu plus tard.

Théorème 2.2 *Soit f une fonction dérivable sur un* intervalle *I. On suppose que pour tout $x \in I$, on a $f'(x) > 0$. Alors on peut affirmer que f est strictement croissante sur I.*

On a bien sûr des versions de ce théorème ou la dérivée est seulement positive ou nulle ou bien avec $f'(x) < 0$...
Notons aussi que la réciproque du théorème n'est que partiellement vraie : si f est strictement croissante sur I, on peut juste en déduire que pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \geqslant 0$ (il peut y avoir des points à tangente horizontale même quand la fonction est strictement croissante).

2.5.2 Tableau de variations

Le tableau de variation qu'on dresse en conclusion de l'étude du signe de la dérivée de f doit aussi indiquer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition. En particulier, toute flèche montante ou descendante de ce tableau doit être dessinée entre deux valeurs de la fonction ou limites de cette fonction.
On pensera aussi à mettre des 0 dans la ligne du signe de $f'(x)$ lorsque cette dérivée s'annule, et des doubles barres là où la fonction n'est pas définie.

2.6 Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$. On veut étudier cette fonction.
Cette fonction est définie pour $x^2+2x \geqslant 0$, donc pour x à l'extérieur des racines -2 et 0 de ce trinôme, donc $\mathscr{D}_f =]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$.
f est dérivable pour tous les x où la quantité sous le radical est strictement positive, il y a donc un problème de dérivabilité en -2 et en 0.
Pour $x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.
Clairement $f'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x < -2$.
On a $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$ (puisque $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x^2+2x} = 0+$), donc $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, et donc, grâce au théorème 2.1, p.45, f n'est pas dérivable à droite en 0. La courbe de f admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale tournée vers le haut.
D'autre part, on a $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \sqrt{x^2+2x} = 0+$ et $\lim\limits_{x\to -2} x+1 = -1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f'(x) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = -\infty$, et on peut affirmer maintenant que f n'est pas dérivable à gauche en -2, et que la courbe de f admet en son point d'abscisse -2 une demi-tangente verticale tournée vers le haut (bien que la limite du taux d'accroissement soit $-\infty$, la demi-tangente est bien tournée vers le haut, car on est à gauche du point d'abscisse -2).

Étudions maintenant les branches infinies de f.
Comme on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x = +\infty$, et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Tout d'abord pour $x \to +\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

Or, $x \to +\infty$, donc $x > 0$ et $|x| = x$, donc

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{1+\frac{2}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

On étudie maintenant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-1x$.

$f(x)-x=\sqrt{x^2+2x}-x=\dfrac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}+x}=\dfrac{2x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+x}$ (on a utilisé ici la classique technique de la quantité conjuguée, qui marche souvent pour une forme indéterminée « $\infty-\infty$ » lorsqu'il y a des radicaux)

Or, $x>0$, donc

$f(x)-x=\dfrac{2x}{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+x}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\dfrac{2}{\sqrt{1}+1}=1$

La droite Δ_1 d'équation $y=x+1$ est donc asymptote oblique à la courbe de f, au voisinage de $+\infty$.

Il reste à déterminer la position de la courbe de f et de cette asymptote :

Pour cela, on étudie le signe de $\varepsilon_1(x)=f(x)-(x+1)=(f(x)-x)-1$; l'intérêt d'écrire $f(x)$ sous cette forme est qu'on vient de calculer et de simplifier $f(x)-x$ (au voisinage de $+\infty$) : on a trouvé $f(x)-x=\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}$.

On a donc $\varepsilon_1(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}-1$, et on peut remarquer que comme $\dfrac{2}{x}>0$, on a $\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1>2>0$, donc $0<\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}<\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}<1$ d'où $\varepsilon_1(x)<0$. La courbe de f est donc au-dessous de l'asymptote Δ_1 au voisinage de $+\infty$.

On étudie ensuite la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

On peut recycler une partie du calcul de $\dfrac{f(x)}{x}$ ci-dessus ; on avait trouvé :

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}$. Mais ici on a $x\to-\infty$, donc $x<0$ et $|x|=-x$. On en déduit

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{-x}{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}=-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\xrightarrow[x\to-\infty]{}-1$

On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$.

On étudie maintenant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$ (avec la même « astuce » de la quantité conjuguée).

$f(x)+x=\sqrt{x^2+2x}+x=\dfrac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}-x}=\dfrac{2x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-x}$; ici $x\to-\infty$, donc $x<0$ et $|x|=-x$, donc

$$f(x)+x=\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{2}{-\sqrt{1}-1}=-1$$

La droite Δ_2 d'équation $y=-x-1$ est donc asymptote oblique à la courbe de f, au voisinage de $-\infty$.

Il reste à déterminer la position de la courbe de f et de cette asymptote :

Pour cela, on étudie le signe de $\varepsilon_2(x)=f(x)-(-x-1)=(f(x)+x)+1$; ici aussi on recycle le calcul qu'on vient de faire pour $f(x)+x$ (au voisinage de $-\infty$) :

$$f(x)+x=-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}.$$

On a donc $\varepsilon_2(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}+1$, et on peut remarquer que comme $\dfrac{2}{x}<0$, on a

$0<\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1<2$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}>\dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}>1$ et $-\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}<-1$;

on peut conclure que $\varepsilon_2(x)<0$. La courbe de f est donc au-dessous de l'asymptote Δ_2 au voisinage de $-\infty$.

Autre méthode pour étudier les branches infinies de f

On écrit un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$:

Posons $h=\frac{1}{x}$; que l'on ait $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$, on a toujours $h\to 0$; on a aussi $x=\frac{1}{h}$, donc on reporte dans l'expression de f :

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{2}{h}}=\frac{\sqrt{1+2h}}{\sqrt{h^2}}=\frac{1}{|h|}\sqrt{1+2h}.$$

On utilise alors le d.l.$_0(2)$ de $\sqrt{1+u}$ qu'on a vu au chapitre précédent :

$\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to0}\varepsilon(u)=0$. On prend bien sûr $u=2h$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2h}&=1+\tfrac{1}{2}(2h)-\tfrac{1}{8}(2h)^2+h^2\varepsilon_1(h)\ (\text{avec}\lim_{h\to0}\varepsilon_1(h)=0)\\&=1+h-\tfrac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_1(h).\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x)=\frac{1}{|h|}\left(1+h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_1(h)\right).$$

Revenons à la variable x, en prenant $\widehat{\varepsilon}(x)=\varepsilon_1(\frac{1}{x})$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\widehat{\varepsilon}(x)=0$.

$$f(x)=|x|\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\widehat{\varepsilon}(x)\right)$$

- Pour $x\to+\infty$, on a $x>0$ et $|x|=x$, donc

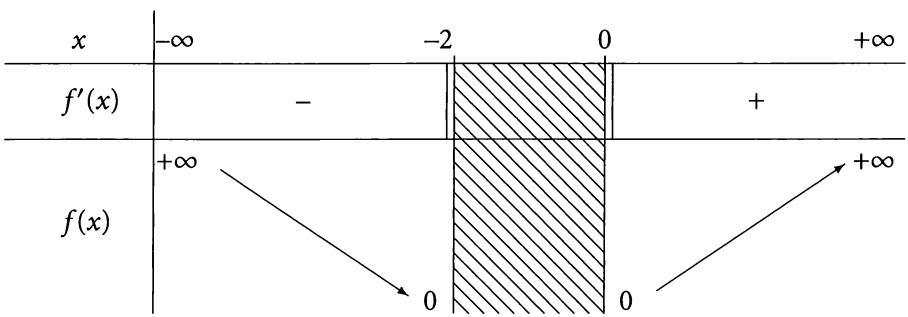
  $f(x)=x+1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x}\widehat{\varepsilon}(x)$, on peut directement affirmer que la courbe de f admet la

droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote oblique, et comme $-\dfrac{1}{2x} < 0$ pour $x > 0$, on est sûr que la courbe de f est au-dessous de son asymptote, au voisinage de $+\infty$.

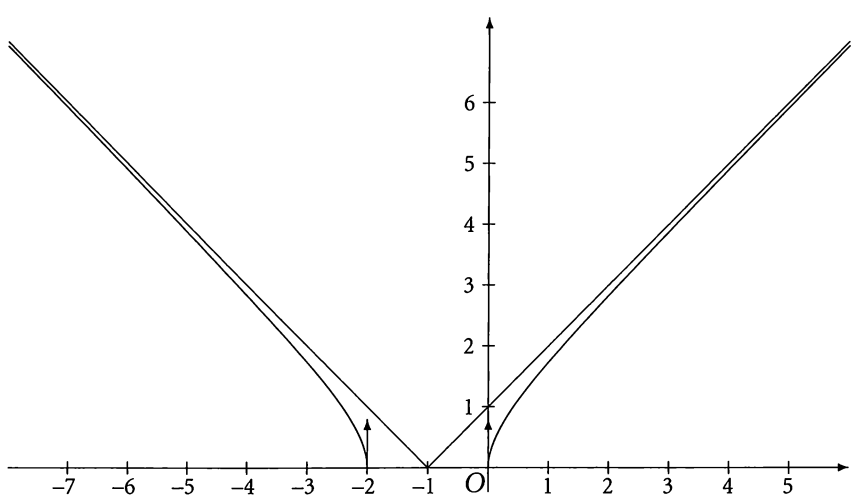
- Pour $x \to -\infty$, on a $x < 0$ et $|x| = -x$, donc $f(x) = -x - 1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x}\widehat{\varepsilon}(x)$, on peut directement affirmer que la courbe de f admet la droite d'équation $y = -x - 1$ comme asymptote oblique, et comme $\dfrac{1}{2x} < 0$ pour $x < 0$, on est sûr que la courbe de f est au-dessous de son asymptote, au voisinage de $-\infty$.

Variations

Dressons maintenant le tableau de variation de f.



On calcule quelques valeurs de $f(x)$, pour pouvoir faire la représentation graphique de la courbe de f dans un repère adapté. On devra pouvoir représenter les droites asymptotes Δ_1 et Δ_2 ; on fera aussi apparaître les demi-tangentes verticales. Comme il est clair que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x, il est inutile de prévoir beaucoup de place en dessous de l'axe des abscisses.
Voici l'aspect de la courbe de f.



2.7 Exercices

Exercice 2.1. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x-3}$.

Exercice 2.2.
Étudier la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

Exercice 2.3. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = x - \sqrt{x+1}$.
En particulier, on montrera que la courbe n'a pas d'asymptote, mais possède une branche parabolique dont on précisera la direction asymptotique.
On précisera quelle est la tangente au point d'abscisse $x = -1$.

Exercice 2.4. On considère la fonction définie par : $f(x) = (2x+1)\,e^{x+1} + x - 3$.

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la courbe représentant f possède :
   - au voisinage de $-\infty$ une asymptote ;
   - au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique d'axe vertical.
3. Déterminer f' et f''. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la courbe représentant f coupe son asymptote en un point.
5. Dessiner la courbe représentant f.

Exercice 2.5. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x-2}$.

Exercice 2.6. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$.

Exercice 2.7. Étudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right).$$

Exercice 2.8. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$.

1. Déterminer son domaine de définition et son domaine de dérivabilité.
2. Calculer sa dérivée et montrer qu'il existe une fonction g telle que :
   $f'(x) = -\dfrac{x}{(x^3-1)^2}\, g(x)$, pour tout x appartenant au domaine de dérivabilité de f.
3. Étudier g et en déduire le tableau des variations de f.
4. Terminer l'étude de la fonction f.

Exercice 2.9. On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$. En déduire que f peut être prolongée à $\mathbb{R}$ par continuité. Soit $\widehat{f}$ ce prolongement.
2. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire que $\widehat{f}$ est dérivable en $x = 0$ et préciser sa tangente à l'origine.
3. Terminer l'étude de la fonction.

Exercice 2.10. On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier. Soit g ce prolongement.
2. Montrer que g est dérivable en 0, et calculer sa dérivée.
3. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que g' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Nous rencontrons ici un exemple classique d'une fonction « pathologique », qui est dérivable, mais dont la dérivée n'est pas continue. Il vaut mieux ne pas essayer de poursuivre l'étude de cette fonction !

Exercice 2.11. Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Exercice 2.12. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
2. Soit g définie par $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$. Montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
3. Étudier la fonction g. Peut-on en déduire que f est croissante ?
4. Terminer l'étude de f. Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes du domaine de définition. Montrer aussi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = +\infty$. Dessiner la courbe représentant f.

Exercice 2.13. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

Exercice 2.14. On considère la fonction f définie par : $f(x) = |x|^{\frac{1}{x+2}}$

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $]-\infty,-2[\cup]-2,0[\cup]0,+\infty[$.
2. Soit g définie par $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x} - \ln(|x|)$. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

3. Étudier les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$. En déduire les variations de f.
4. Étudier l'aspect de la courbe de f au voisinage des points limites (lorsque x tend vers -2 et lorsque x tend vers 0).
5. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de la droite d'équation $y = 1$.
6. Construire la courbe représentant f.

CHAPITRE 3

Nouvelles fonctions de référence

Au lycée, on étudie et on connaît plus ou moins : les fonctions polynômes et rationnelles, exponentielles et logarithmes, ainsi que les fonctions trigonométriques. Nous allons présenter un certain nombre d'autres fonctions dont on peut soupçonner l'existence de certaines en observant une calculatrice (fonctions de trigonométrie réciproque) et qui rendent de grands services en analyse. On doit commencer par voir ou revoir le théorème de la bijection réciproque par lequel tout commence.

3.1 Fonctions réciproques

3.1.1 Le théorème de la bijection réciproque

Théorème 3.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{D}_f$. Soit I un* intervalle *inclus dans $\mathscr{D}_f$. On suppose que f est* continue *et* strictement monotone *sur I. Alors f réalise une bijection de I sur un intervalle image $J = f(I)$. Selon les cas, voici l'intervalle J en fonction de I (a et b sont des réels, α et β sont soit des réels, soit $\pm\infty$).*

Si f est croissante sur I		*Si f est décroissante sur I*	
si $I = \ldots$	*alors $J = \ldots$*	*si $I = \ldots$*	*alors $J = \ldots$*
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[a,b]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,\beta[$	$\left[f(a), \lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ (x<\beta)}} f(x)\right[$	$[a,\beta[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ (x<\beta)}} f(x), f(a)\right]$
$]\alpha,b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ (x>\alpha)}} f(x), f(b)\right]$	$]\alpha,b]$	$\left[f(b), \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ (x>\alpha)}} f(x)\right[$
$]\alpha,\beta[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ (x>\alpha)}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ (x<\beta)}} f(x)\right[$	$]\alpha,\beta[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ (x<\beta)}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ (x>\alpha)}} f(x)\right[$

Il existe donc une bijection réciproque g de la restriction[1] *de f à I, caractérisée par :* $\forall x \in I$, $y = f(x) \iff x = g(y)$. *(Lorsque I coïncide avec l'ensemble de définition* $\mathscr{D}_f$ *de f, on peut dire que f* est *une bijection de I sur J, et on écrit* $g = f^{-1}$. *Lorsque ce n'est pas le cas, on a simplement* $g = \left(f_{|I}\right)^{-1}$*). L'ensemble de définition de g est l'intervalle J.*
La fonction g est continue sur J, et est strictement monotone (avec la même monotonie que $f_{|I}$*) sur J.*
Si de plus f est dérivable[2] *sur I, alors pour tout* $x \in I$ *tel que* $f'(x) \neq 0$, *g est dérivable en* $y = f(x)$, *et on a* $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(g(y))}$
(On retient souvent $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, *mais en fait cette formule n'est valable que lorsque f* est *une bijection.)*
Pour les x de I pour lesquels on a $f'(x) = 0$, *alors g n'est pas dérivable en* $y = f(x)$, *et la courbe de g admet en ces points une tangente (ou une demi-tangente) verticale.*
Dans un repère orthonormal, *la courbe de g se déduit de la courbe de f par symétrie orthogonale par rapport à la* première bissectrice du repère, *c'est-à-dire la droite d'équation* $y = x$. *Dans un repère quelconque, c'est la transformation* $(x,y) \longmapsto (y,x)$ *qui échange les courbes de f et de g.*

Nous admettons les résultats de ce théorème.

3.1.2 Un exemple classique, les fonctions ln et exp

Ces deux fonctions sont étroitement liées, et quel que soit le point de vue, l'une est la réciproque de l'autre.

- Si on a commencé par définir la fonction logarithme népérien ln (par exemple comme la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1) on a montré que cette fonction ln est continue et strictement croissante sur son ensemble de définition $I = \mathscr{D}_{\ln} =]0,+\infty[$. ln est donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J = \ln(I) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$.
  Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle exp, définie sur $J = \mathbb{R}$, continue et strictement croissante sur cet intervalle, et comme $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ ne s'annule jamais, la fonction réciproque exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée vérifie :

[1] La notation $f_{|I}$ signifie « restriction de f à I » : la restriction d'une fonction f à un intervalle $I \subset \mathscr{D}_f$, c'est la fonction h définie par $h(x) = f(x)$, mais ceci uniquement pour les $x \in I$.

[2] On sait que le signe de $f'(x)$ dépend de la monotonie de f : si f est strictement croissante, $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ et si f est strictement décroissante sur I, alors $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, mais on n'est pas sûr que $f'(x) \neq 0$

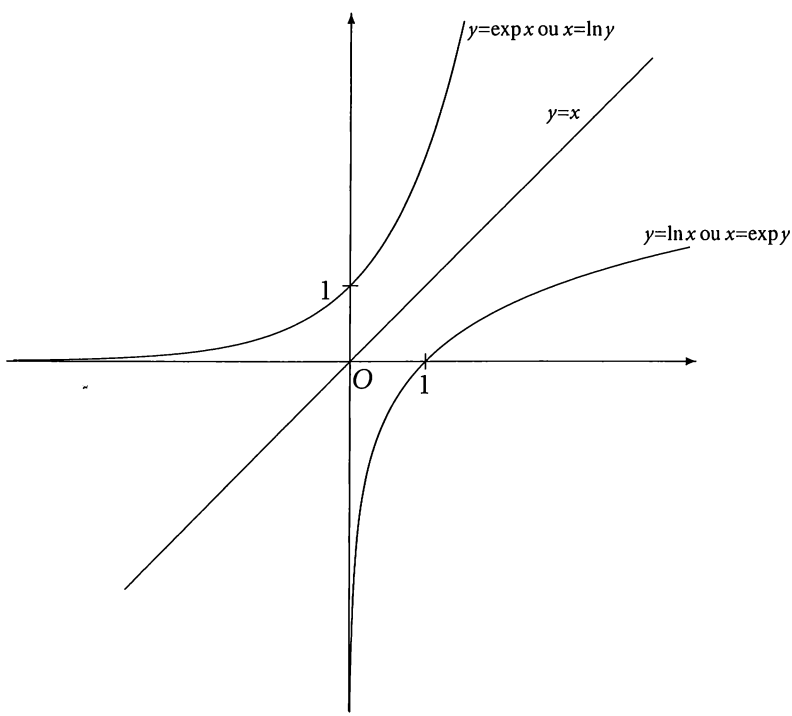
Pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = \ln(x) \iff x = \exp(y)$, avec $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\exp'(y) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \exp(y).$$

- Si au contraire on commence par définir la fonction exponentielle (c'est cette démarche qui est privilégiée dans l'enseignement secondaire : la fonction exp est la solution de l'équation différentielle $f' = f$ vérifiant $f(0) = 1$), on établit que cette fonction exp est continue et strictement croissante sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$; exp est donc une bijection de $I =]-\infty, +\infty[$ sur $J = \exp(I) = \left]\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x), \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x)\right[=]0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction ln, définie sur $J =]0, +\infty[= \mathbb{R}^{*+}$, continue et strictement croissante sur cet intervalle, et comme $\exp'(x) = \exp(x)$ ne s'annule jamais, la fonction réciproque ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, et sa dérivée vérifie :
Pour tout $y \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $y = \exp(x) \iff x = \ln(y)$, avec $x \in]-\infty, +\infty[$, on a

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}.$$

La figure est la même dans les deux cas : les courbes de ln et de exp sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.



3.2 Fonctions racines n-ièmes

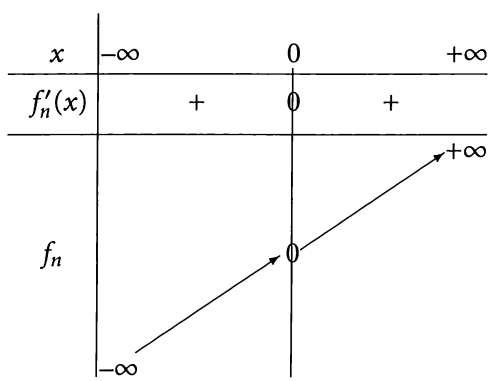
Dans tout ce paragraphe, n est un entier supérieur ou égal à 2.

3.2.1 Fonctions puissances

On considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n$. Selon que n est pair ou impair, f_n est une fonction paire ou impaire, et on peut toujours se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$ et compléter ensuite par symétrie (centrale si n est impair, axiale si n est pair). f_n est clairement strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$, de sorte que la courbe de f_n admet toujours au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique verticale.

3.2.2 Fonction racine n-ième pour n impair

Pour n impair (donc $n \geqslant 3$),on a $f_n'(x) = nx^{n-1} \geqslant 0$ puisque $n-1$ est pair, et $f_n'(x)$ s'annule pour 0 ; le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}$ est le suivant :



f_n est donc continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$, f_n est donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque est, par définition, la fonction $g_n : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ (on lit « racine n-ième » de x).

En application des généralités sur les fonctions réciproques, g_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable sauf en $f_n(0)$ (puisque $f_n'(0) = 0$), donc g_n n'est pas dérivable en 0, et pour $y = f_n(x) \neq 0$, on a $g_n'(y) = \dfrac{1}{f_n'(x)} = \dfrac{1}{nx^{n-1}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{y}^{n-1}}$.

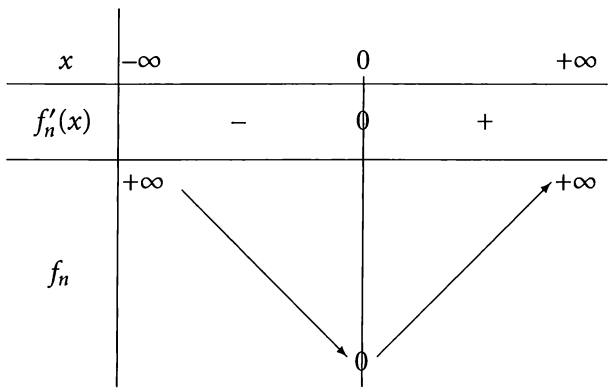
(*On a donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, $g_n'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$.)

La courbe de g_n est la symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ de la courbe de f_n, et en particulier elle admet l'origine du repère comme centre de symétrie, de sorte que g_n est impaire. On a donc $\sqrt[n]{-y} = -\sqrt[n]{y}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

De plus, toujours par symétrie, on peut affirmer que la courbe de g_n admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique horizontale.

3.2.3 Fonction racine n-ième pour n pair

Pour n pair (avec $n \geqslant 2$), on a $f_n'(x) = nx^{n-1} \geqslant 0$ qui est du signe de x, et $f_n'(x)$ s'annule pour 0 ; le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}$ est le suivant :



f_n, dans ce cas n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais seulement sur $\mathbb{R}^+$ ou sur $\mathbb{R}^-$. On utilise le fait que f_n est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$: f_n réalise donc une bijection de $I = [0,+\infty[$ sur $J = [f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[= [0,+\infty[$. La bijection réciproque de $f_{n|_I}$ est la fonction $g_n : y \longmapsto \sqrt[n]{y}$, caractérisée, pour $x \geqslant 0$, par $y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}$.

Remarquons bien que ici n est pair, et que dans cette situation g_n n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, alors que pour n impair, on a vu que g_n est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : $\sqrt[5]{-2}$ existe, alors que $\sqrt[6]{-3}$ n'existe pas.

La fonction g_n, dans ce cas, est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, mais elle est non dérivable en 0. Sa dérivée a (pour n pair) la même expression que pour n impair. On a pour y strictement positif, $g_n'(y) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{y}^{n-1}}$ (et donc $g_n'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$).

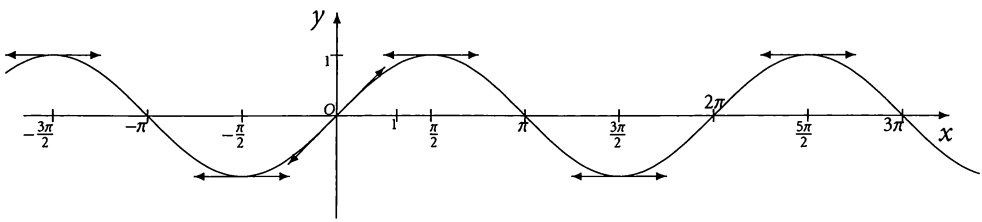
Pour retenir et retrouver cette formule, on remarque que pour $x > 0$, on a $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. En effet, $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{n}{n}} = x$. En application de la formule de dérivation d'une fonction $x \longmapsto x^\alpha$, on a donc (pour $x > 0$), vu que $g_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $g_n'(x) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \dfrac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}$

C'est cette méthode qu'il est recommandé d'appliquer pour déterminer la dérivée d'une fonction racine n-ième (que n soit pair ou impair).

3.3 Fonctions trigonométriques réciproques

3.3.1 La fonction arc sinus

Voici l'aspect de la courbe de la fonction sin.
Rappelons que sin est impaire et 2π-périodique. Sa dérivée est la fonction cos, qui s'annule pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Il est clair que cette fonction n'est pas strictement monotone sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$, mais on peut trouver de nombreux intervalles I sur lesquels sin est strictement monotone. L'usage est de privilégier l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
La fonction sin est continue et strictement croissante sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur $J = \sin(I) = [\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$. La bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est par définition la fonction arcsin, (on lit « arc sinus »), qui est donc :

- définie, continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$;
- caractérisée, pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, par $y = \sin x \iff x = \arcsin y$;
- à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (pour tout $y \in J$, on a $\arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) ;
- dérivable pour tous les $y = \sin x$ tels que x n'annule pas la dérivée de sin ; or, $\cos x = 0$ pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, qui correspondent à $y = \pm 1$, donc arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, mais n'est pas dérivable (à droite) en -1, ni dérivable (à gauche) en 1.

Pour $y \in]-1, 1[$, si $x = \arcsin y$ (et donc $y = \sin x$), on a

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$

Déterminons la valeur de $\cos(\arcsin y) = \cos x$. On sait que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Mais on a vu que $x = \arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos x \geqslant 0$, et donc $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$. Or, on a justement $\sin x = y$, donc on retiendra les deux formules suivantes :

$$\forall y \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\forall y \in]-1, 1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

D'autre part, par définition de arcsin, on a aussi

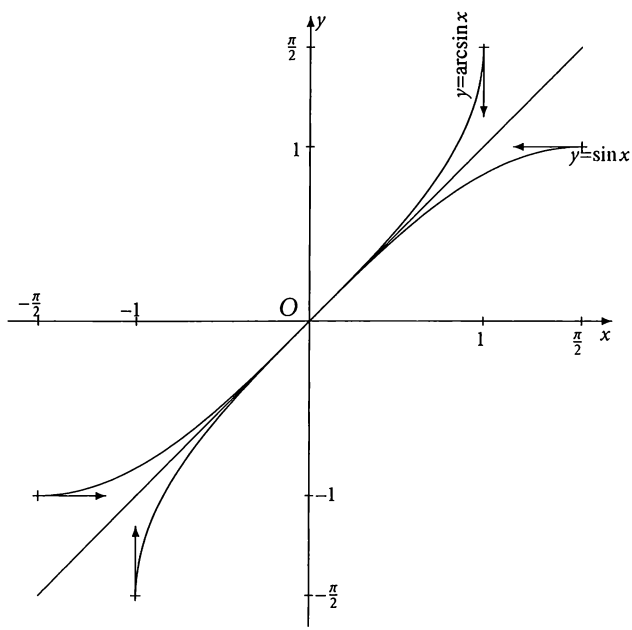
$$\forall y \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin y) = y \tag{3.1}$$

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin x) = x \tag{3.2}$$

Remarque : La formule (3.2) est beaucoup plus dangereuse que la formule (3.1) ; en effet, $\sin x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\sin x$ est toujours compris entre -1 et 1, de sorte que $\arcsin(\sin x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais l'égalité de (3.2) $\arcsin(\sin x) = x$ n'est valable que pour les x dans l'intervalle particulier formé de l'ensemble des valeurs de la fonction arcsin, c'est-à-dire dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
En revanche, on risque moins de se tromper avec la formule (3.1) $\sin(\arcsin y) = y$, car elle est vraie dès que $\arcsin y$ existe, donc dans la totalité de son ensemble de définition.

Représentation graphique de arcsin

On part de la courbe de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans un repère orthonormal, et on fait une symétrie par rapport à la droite $y = x$:
Notons que les deux demi-tangentes horizontales de la courbe de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ sont transformées par symétrie en des demi-tangentes verticales.



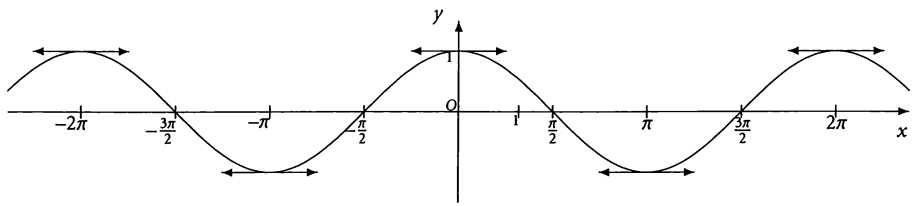
Remarque : On sait que la fonction sin est impaire ; la représentation graphique de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est donc symétrique par rapport à l'origine O du repère, et après une symétrie par rapport à la droit $y = x$, la courbe obtenue, qui est celle de la fonction arcsin, est encore symétrique par rapport à O. La fonction arcsin est donc elle aussi *impaire*.

Remarque : Des valeurs usuelles de la fonction sin, on déduit aisément le tableau suivant de valeurs usuelles de la fonction arcsin :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

3.3.2 La fonction arc cosinus

On part maintenant de la courbe de la fonction cosinus.



Il y a bien sûr plusieurs intervalles sur lesquels la fonction cos est continue et strictement monotone, mais l'usage est de se placer sur l'intervalle $[0,\pi]$.
La fonction cos est continue et strictement *décroissante* sur l'intervalle $[0,\pi]$, elle réalise donc une bijection de $I = [0,\pi]$ sur l'intervalle image $J = \cos(I) = [\cos\pi, \cos 0] = [-1,1]$.
La bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$ est par définition la fonction arccos, (on lit « arc cosinus »), qui est donc :

- définie, continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$;
- caractérisée, pour $x \in [0,\pi]$, par $y = \cos x \iff x = \arccos y$;
- à valeurs dans $[0,\pi]$ (pour tout $y \in J$, on a $\arccos y \in [0,\pi]$) ;
- dérivable pour tous les $y = \cos x$ tels que x n'annule pas la dérivée de cos ; or, $\cos'(x) = -\sin x$ et $\sin x = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = \pi$ (dans I), qui correspondent à $y = \pm 1$, donc arccos est dérivable sur $]-1,1[$, mais n'est pas dérivable (à droite) en $-1 = \cos\pi$, ni dérivable (à gauche) en $1 = \cos 0$.

Pour $y \in]-1,1[$, si $x = \arccos y$ (et donc $y = \cos x$), on a
$\arccos'(y) = \dfrac{1}{\cos'(x)} = \dfrac{1}{-\sin x} = \dfrac{-1}{\sin(\arccos y)}$.
Pour déterminer la valeur de $\sin(\arccos y)$, on raisonne exactement comme on l'avait fait pour $\cos(\arcsin y)$. On sait que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Mais on a vu que $x = \arccos y \in [0,\pi]$, donc $\sin x \geqslant 0$, et donc $\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$. Or, on a justement $\cos x = y$, donc on retiendra les deux formules suivantes :

$$\forall y \in [-1,1], \quad \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$$

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

D'autre part, par définition de arccos, on a aussi

$$\forall y \in [-1,1], \quad \cos(\arccos y) = y \tag{3.3}$$

$$\forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos x) = x \tag{3.4}$$

Remarque : Ici aussi, c'est la dernière formule (3.4) qui est dangereuse, alors que la précédente (3.3) est « inoffensive » ; en effet, $\cos x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\cos x$ est toujours compris entre -1 et 1, de sorte que $\arccos(\cos x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais l'égalité (3.4) $\arccos(\cos x) = x$ n'est valable que pour les x dans l'intervalle particulier formé de l'ensemble des valeurs de la fonction arccos, c'est-à-dire dans $[0,\pi]$.
En revanche, la formule (3.3) $\cos(\arccos y) = y$ est sans danger, car elle est vraie dès que $\arccos y$ existe, donc dans la totalité de son ensemble de définition.

Remarque : Ce qu'on a fait pour arccos ressemble beaucoup à ce qu'on avait fait pour arcsin. En particulier, la dérivée de arccos est l'opposée de la dérivée de arcsin.
Si l'on considère la fonction $\varphi : x \longmapsto \arcsin x + \arccos x$, définie et continue sur $[-1,1]$, et dérivable sans problème sur $]-1,1[$, on constate que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, donc la fonction φ est constante sur $]-1,1[$, et par continuité, elle est aussi constante sur $[-1,1]$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [-1,1]$, on a $\varphi(x) = C$. Pour déterminer la valeur de cette constante, il suffit de déterminer la valeur de $\varphi(x)$ pour un x particulier, par exemple pour $x = 0$. On a vu que $\arcsin 0 = 0$; d'autre part, $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, donc $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Finalement $\varphi(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, donc $C = \frac{\pi}{2}$, et on peut retenir

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{3.5}$$

Représentation graphique de arccos

Avant de faire le tracé, deux petites remarques :

Remarque : On sait que la fonction cos est paire ; la représentation graphique de $\cos_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, mais pour la définition de arccos, c'est $\cos_{|[0,\pi]}$ que l'on considère et cette représentation graphique n'a pas de symétrie particulière
La fonction arccos n'est *ni paire, ni impaire.* Simplement, on peut montrer, grâce à la relation (3.5), que la courbe de arccos est symétrique de celle de arcsin par rapport à la droite horizontale d'équation $y = \frac{\pi}{4}$.
De plus, on peut exprimer $\arccos(-x)$ en fonction de $\arccos x$, voir l'exercice 3.1 1° p.74 ; on montre que

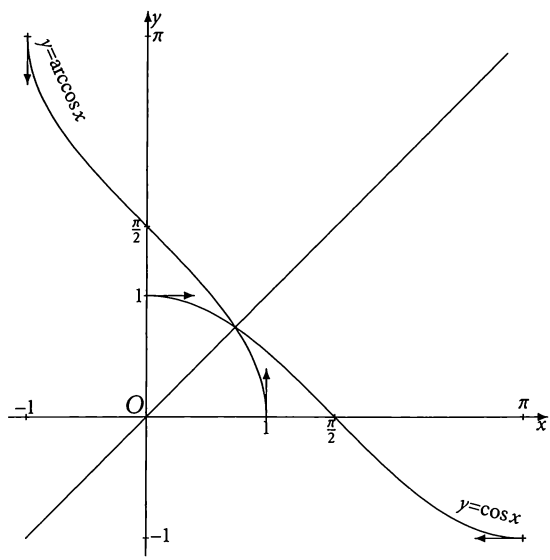
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \tag{3.6}$$

Remarque : Grâce aux valeurs usuelles de la fonction cos, ou grâce à celles de arcsin et à la relation (3.5), on remplit aisément le tableau suivant de valeurs usuelles de la fonction arccos :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

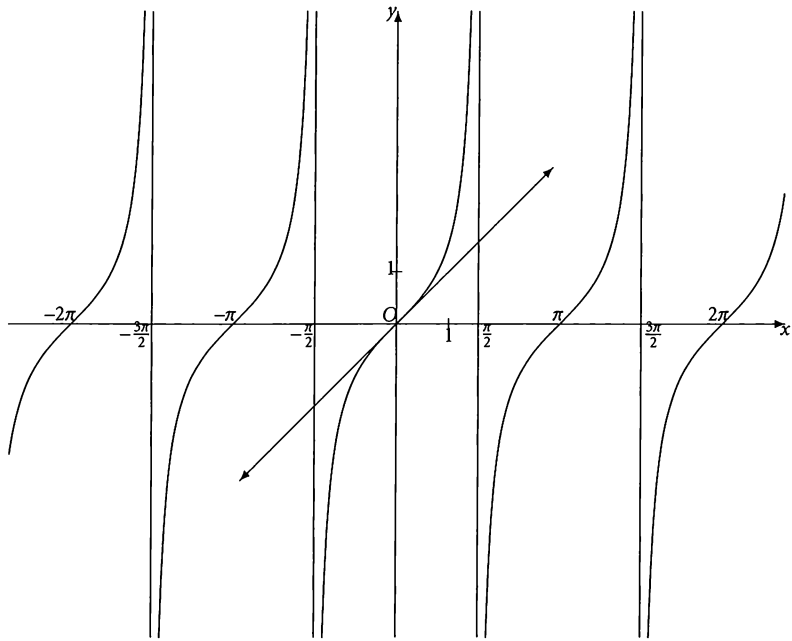
Pour des x négatifs, on utilise ce tableau et la formule (3.6) ci-dessus.

On peut maintenant faire le tracé.
On part de la représentation dans un repère orthonormal de la restriction de cos à l'intervalle $[0,\pi]$ et on fait une symétrie par rapport à la droite $y = x$.



3.3.3 La fonction arc tangente

On part de la représentation graphique de la fonction tangente.
On sait que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ n'existe pas pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, puisque pour de tels x, on a $\cos x = 0$. D'autre part, la fonction tan est π-périodique et impaire, on voit facilement que $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$ (pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos x > 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \cos x = 0+$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$).
Enfin $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$, donc tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En particulier $\tan'(0) = 1$, ce qui fait que la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe de tan à l'origine.
Voici l'aspect de la représentation graphique de tan.



La fonction tangente est strictement croissante sur tous les intervalles inclus dans son ensemble de définition, mais c'est naturellement sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ que l'on se place : la fonction tan est continue et strictement croissante sur I, elle réalise donc une bijection de I sur :

$$J = \tan(I) = \left]\lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}} \tan x, \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan x\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

La bijection réciproque de la fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est, par définition, la fonction arctan, (on lit « arc tangente »), qui est donc :

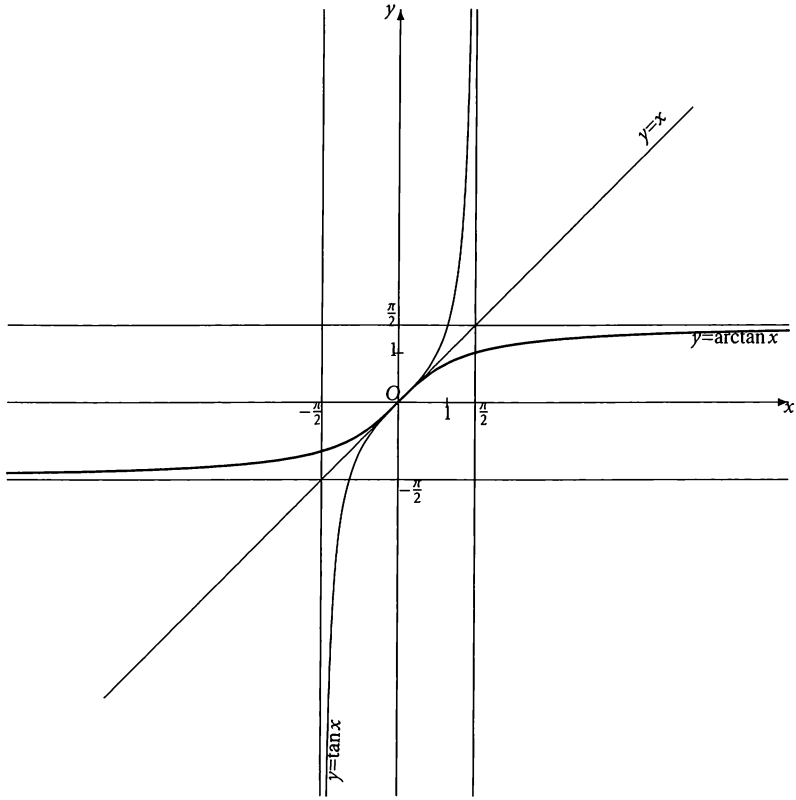
- définie, continue et strictement croissante sur $J =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$;
- caractérisée, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, par $y = \tan x \iff x = \arctan y$;
- dérivable partout, puisque la dérivée de la fonction tangente ne s'annule jamais.

Pour $y \in \mathbb{R}$, si $x = \arctan y$ (et donc $y = \tan x$), on a

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Représentation graphique de arctan



Par définition de arctan, on a aussi

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan y) = y \tag{3.7}$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan x) = x \tag{3.8}$$

Remarque : Ici aussi, c'est cette dernière formule (3.8) qui est dangereuse, alors que la précédente (3.7) est « inoffensive » ; en effet, $\tan x$ existe pour d'autres $x \in \mathbb{R}$ que ceux qui sont dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\arctan(\tan x)$ existe pour ces x. Mais comme $\arctan y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour tout y, l'égalité $\arctan(\tan x) = x$ n'est valable que pour les x dans l'intervalle particulier formé de l'ensemble des valeurs de la fonction arctan, c'est-à-dire dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
En revanche, la formule $\tan(\arctan y) = y$ est sans danger et elle est vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Remarque :

- Comme pour la fonction sin, le fait que la fonction tan soit impaire permet de prouver aisément que la fonction arctan est donc elle aussi *impaire.*
- Des valeurs usuelles de la fonction tan, on déduit aisément le tableau suivant de valeurs usuelles de la fonction arctan. Les valeurs de x remarquables ne sont pas les mêmes que pour arcsin ou arccos :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

3.4 Trigonométrie hyperbolique

3.4.1 Définitions

Définition 3.2 On appelle fonction sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique les fonctions définies respectivement par les formules :

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$$

Cette définition est à rapprocher des formules d'Euler liées aux fonctions sinus et cosinus.

3.4.2 Quelques propriétés immédiates

Ces trois fonctions sont définies (et donc continues et dérivables) sur $\mathbb{R}$, car leur expression n'utilise que des fonctions sans problème, et il est évident qu'on a toujours $\operatorname{ch}x \neq 0$. En fait, on a, plus précisément :

$\operatorname{ch}x > 0$ et même, comme $\operatorname{ch}x - 1 = \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{2} = \dfrac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2}{2} \geqslant 0$, on peut dire que $\operatorname{ch}x \geqslant 1$ (on retrouvera ce résultat plus facilement après l'étude des variations de ch).

$\operatorname{sh}x = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$ et de même $\operatorname{sh}x > 0 \iff x > 0$: $\operatorname{sh}x$ est du signe de x.

Quant à $\operatorname{th}x$, puisque $\operatorname{th}x = \dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ et comme $\operatorname{ch}x > 0$, on voit immédiatement que $\operatorname{th}x$ est du signe de $\operatorname{sh}x$, donc du signe de x.

La fonction sh et la fonction th sont impaires, tandis que la fonction ch est paire.

On peut donner plusieurs expressions de $\operatorname{th}x$ à l'aide de la fonction exponentielle :

$$\operatorname{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

D'autre part, il est évident que $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}x$ et $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}x$.

Une formule utile pour le calcul de la dérivée de th est la suivante :

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ (évident en développant, ou en factorisant).

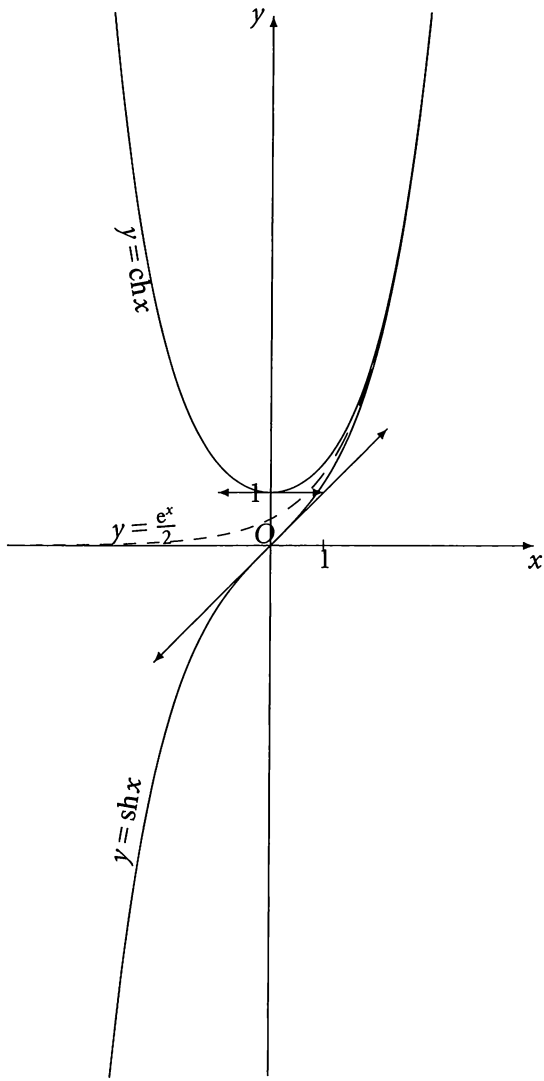
On obtient alors

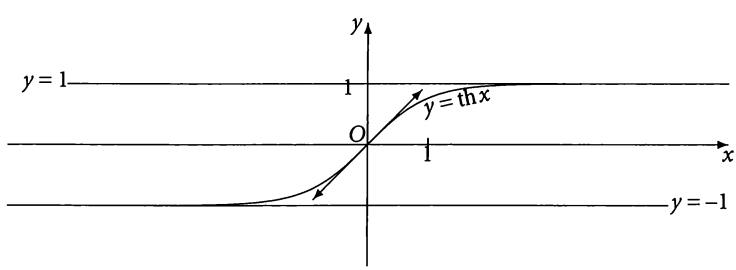
$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(x) &= \left(\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\right)'(x)\\ &= \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2 x}\\ &= \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}\\ &= 1 - \mathrm{th}^2 x\\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.\end{aligned}$$

3.4.3 Étude des fonctions sh, ch et th

Comme ces trois fonctions sont paires ou impaires, on se contente de faire l'étude sur $\mathbb{R}^+$.
On a déjà tous les éléments pour l'étude du signe des dérivées : il est absolument évident que ces trois fonctions sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^{*+}$.
Étudions les limites en $+\infty$.
Pour ch et sh, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, il n'y a aucune indétermination et on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\,x = +\infty$.

Pour th, il n'y a pas de problème si on prend la bonne formule : $\mathrm{th}\,x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$; puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}\,x = 1$. La courbe de th admet donc, au voisinage de $+\infty$, la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale.
Il reste à étudier les branches infinies de la courbe de sh et de la courbe de ch. Mais comme on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, il est tout à fait clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{ch}\,x}{x} = +\infty$.
Ces deux courbes admettent donc, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique verticale.
Un petit complément intéressant est le suivant :
On a $\mathrm{sh}\,x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{ch}\,x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} = 0+$, la courbe de ch et la courbe de sh se rapprochent, pour $x \to +\infty$, de la courbe de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$, qui est donc une courbe asymptote à ces deux courbes. En étudiant le signe de la différence, on voit que la courbe de ch est au-dessus de cette courbe asymptote alors que celle de sh est au-dessous.
Il n'est même pas utile de faire le tableau de variation des fonctions : ces variations sont évidentes, en tout cas sur $\mathbb{R}^+$.
Voici donc l'aspect des courbes de ces fonctions ; on représente sh et ch sur un même graphique avec la courbe de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$, et la courbe de th à part. On pensera bien à compléter les courbes par symétrie (symétrie centrale pour sh et th, symétrie axiale pour ch).


y
y = ch x
1
y = e^x / 2
O
1
x
y = sh x


y
y = 1
1
y = th x
O
1
x
y = −1

3.5 Fonctions trigonométriques hyperboliques réciproques

Les fonctions de trigonométrie hyperboliques (sh, ch et th) sont toutes les trois continues et strictement monotones, au moins sur une partie de leur ensemble de définition, ce qui fait qu'elles réalisent des bijections entre une partie (ou la totalité) de leur ensemble de définition et un intervalle à préciser à chaque fois. Cela permet de définir les fonctions trigonométriques hyperboliques réciproques.

3.5.1 Argument sinus hyperbolique

La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ sur $]\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x, \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. La fonction réciproque de sh est, par définition, la fonction argsh (on lit : « argument sinus hyperbolique »), définie sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction strictement croissante, continue, impaire (comme la fonction sh), dérivable partout (car la dérivée ch de sh ne s'annule jamais), qui vérifie $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{argsh} x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh} x = +\infty$, caractérisée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad y = \operatorname{sh} x \iff x = \operatorname{argsh} y.$$

D'autre part, en application de la formule de dérivation de la fonction réciproque, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{argsh}'(y) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}'(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} y)}$.

Or, on a vu que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, donc $\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x + 1$ et $\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}$ (puisque $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout x). Or, $\operatorname{sh} x = y$, donc on a prouvé que :

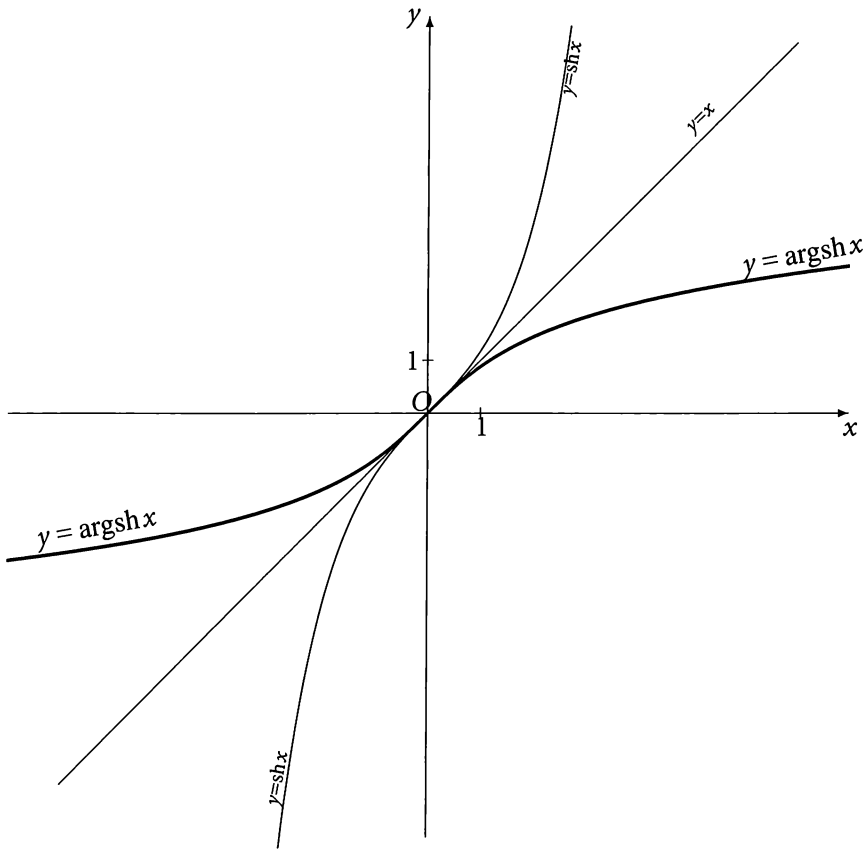
$$\forall y \in \mathbb{R},\quad \operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

(On a bien sûr aussi $\operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.)

La courbe de argsh est la symétrique par rapport à la droite $y = x$ de la courbe de sh. Cette dernière courbe, en tant que courbe d'une fonction impaire, est symétrique par rapport à l'origine. La courbe de argsh est donc aussi symétrique par rapport à l'origine, et la fonction argsh est donc une fonction impaire (ce qu'on peut aussi retrouver par un calcul direct).

La droite d'équation $y = x$ est la tangente à l'origine de la courbe de sh, par symétrie c'est donc aussi la tangente à l'origine à la courbe de la fonction argsh. C'est cohérent avec le fait que $\operatorname{argsh}'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{0^2+1}} = 1$.

Voici l'aspect de la courbe représentative de argsh :



Expression logarithmique de argsh

On peut résoudre l'équation définissant $y = \operatorname{argsh} x$, en revenant à la définition à partir des exponentielles de la fonction sh :

$$y = \operatorname{argsh} x \iff x = \operatorname{sh} y \iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \iff 2x = e^y - \frac{1}{e^y}$$
$$\iff e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Pour résoudre cette équation dont l'inconnue est y, (x est un paramètre), on fait le changement d'inconnue $e^y = Y$, donc $y = \ln Y$. Puisque $Y > 0$, on ne gardera que les solutions positives de l'équation obtenue. $y = \operatorname{argsh} x \iff Y^2 - 2xY - 1 = 0$. On s'est ramené à une équation ordinaire, du second degré. Remarquons que l'on sait déjà que cette équation (du type $aY^2 + bY + c = 0$) possède deux solutions réelles, une étant positive et l'autre négative, car $a = 1$ et $c = -1$ sont de signe contraire, donc $\Delta > 0$ forcément, et le produit des racines vaut ici $\frac{c}{a} = -1 < 0$.

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) > 0$, de sorte que les deux solutions de cette équation sont, a priori $Y_1 = x + \sqrt{x^2 + 1}$ et $Y_2 = x - \sqrt{x^2 + 1}$. Il est évident que $Y_1 > Y_2$, donc $Y_1 > 0$ et $Y_2 < 0$, de sorte que seule Y_1 convient :

$y = \operatorname{argsh} x \iff e^y = Y = Y_1 = x + \sqrt{x^2 + 1} \iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Nous avons ainsi trouvé l'*expression logarithmique de l'argument sinus hyperbolique* :

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

3.5.2 Argument cosinus hyperbolique

La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. C'est sur $\mathbb{R}^+$ qu'il est d'usage d'inverser ch : cette fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ sur $[\operatorname{ch}(0), \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x[= [1,+\infty[$. La fonction réciproque de $\operatorname{ch}_{|[0,+\infty[}$ est, par définition, la fonction argch (on lit : « argument cosinus hyperbolique »), définie sur $[1,+\infty[$. C'est une fonction strictement croissante, continue, dérivable partout sauf en $1 = \operatorname{ch}(0)$ (car la dérivée sh de la fonction ch s'annule uniquement en 0), qui vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{argch} x = +\infty$ et bien sûr $\operatorname{argch}(1) = 0$; elle est caractérisée par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall y \in [1,+\infty[, \quad y = \operatorname{ch} x \iff x = \operatorname{argch} y.$$

D'autre part, en application de la formule de dérivation de la fonction réciproque, on a, pour tout $y \in]1,+\infty[$ tel que $y = \operatorname{ch} x$ (avec forcément $x > 0$),

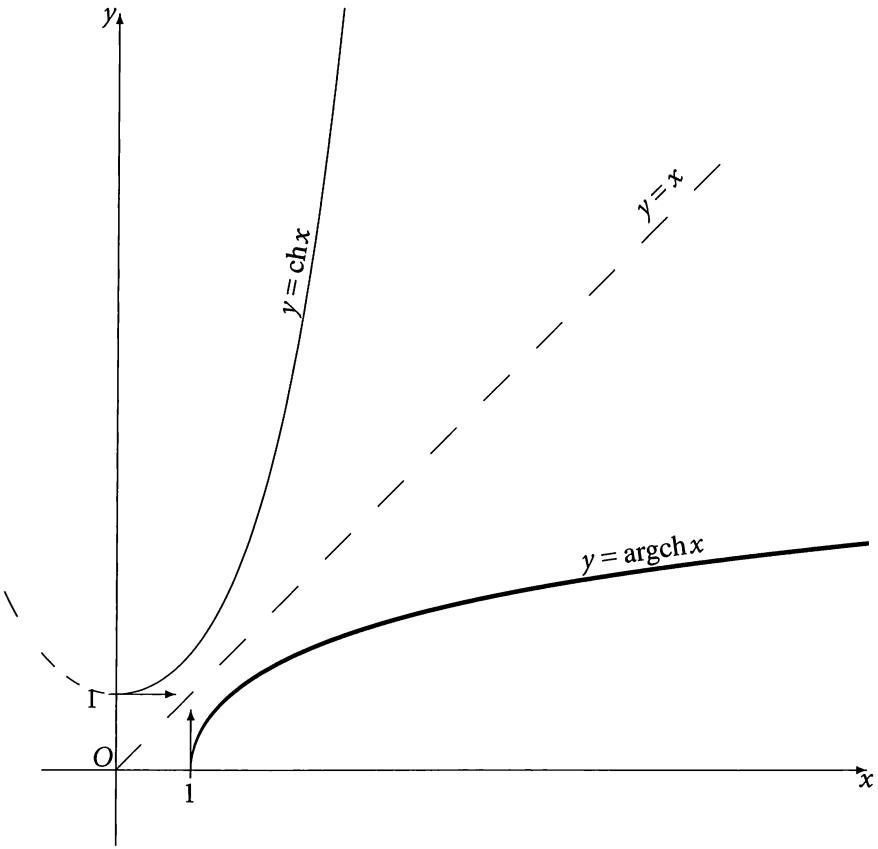
$$\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(x)} = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} y)}.$$

Or, on a toujours $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, donc $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$ et $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$ (puisqu'on ne considère que des $x > 0$, pour lesquels on a aussi $\operatorname{sh} x > 0$). Or, $\operatorname{ch} x = y$, donc on a prouvé que

$$\forall y \in]1,+\infty[, \quad \operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

(On a bien sûr aussi $\operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.) Remarquons qu'il est nécessaire que $y \neq 1$, pour que cette formule ait un sens, et que puisqu'il est clair que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \operatorname{argch}'(x) = +\infty$, la courbe de argch admet, en son point d'abscisse 1, une demi-tangente verticale, qu'on dessinera tournée vers le haut.

Voici l'aspect de la courbe représentative de argch :



Expression logarithmique de argch

On peut, comme on l'avait fait pour argsh, résoudre en y l'équation définissant $y = \operatorname{argch} x$, en revenant à la définition à partir des exponentielles de la fonction ch ; pour $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 0$, on a :

$$y = \operatorname{argch} x \iff x = \operatorname{sh} y \iff x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \iff 2x = e^y + \frac{1}{e^y}$$
$$\iff e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0.$$

On fait encore le changement d'inconnue $e^y = Y$, donc $y = \ln Y$. Ici aussi $Y > 0$, on ne pourra garder que des solutions positives de l'équation obtenue, mais ce n'est pas la seule condition : en effet, on ne cherche que des nombres y dans l'intervalle $[0, +\infty[$, donc il faudra aussi que $Y = e^y > 1$.

$y = \operatorname{argch} x \iff Y^2 - 2xY + 1 = 0$. On s'est ramené à une équation ordinaire, du second degré. Ici, cette équation (du type $aY^2 + bY + c = 0$) est telle que $a = 1 = c$ et $b = -2x$, donc s'il y a des solutions, elles seront de même signe. De plus comme le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = 1 > 0$, les deux racines seront de même signe et inverses l'une de l'autre. Enfin, comme la somme des racines vaut $-\frac{b}{a} = 2x$, et comme forcément $x \geqslant 1$ la somme des racines est positive. Cela prouve que s'il y a des racines, elles sont toutes les deux positives,

et comme elles sont inverses l'une de l'autre, l'une est plus grande que 1, et l'autre plus petite : on ne gardera que celle qui est supérieure (ou égale) à 1, c'est-à-dire la plus grande des deux.

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2-1) \geqslant 0$ puisqu'on a $x \geqslant 1$, de sorte que les deux solutions (éventuellement confondues, pour $x = 1$) de cette équation sont, $Y_1 = x + \sqrt{x^2-1}$ et $Y_2 = x - \sqrt{x^2-1}$. Il est évident que $Y_1 \geqslant Y_2$, donc $Y_1 \geqslant 1$ et $0 < Y_2 \leqslant 1$, de sorte que c'est Y_1 qui convient :

$y = \operatorname{argch} x \iff \mathrm{e}^y = Y = Y_1 = x + \sqrt{x^2-1} \iff y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Nous avons ainsi trouvé l'*expression logarithmique de l'argument cosinus hyperbolique* :

$$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Pour retenir laquelle des deux formules $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ et $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ concerne argsh ou argch, il est pertinent de considérer l'ensemble de définition : la première, à cause de $\sqrt{x^2-1}$, n'a pas de sens pour des x entre -1 et 1, elle ne peut donc pas concerner argsh qui est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, c'est donc celle qui convient à argch.

3.5.3 Argument tangente hyperbolique

La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ sur $\left]\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x, \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x\right[=]-1, 1[$. La fonction réciproque de th est, par définition, la fonction argth (on lit : « argument tangente hyperbolique »), définie sur $]-1, 1[$. C'est une fonction strictement croissante, continue, impaire (comme la fonction th), dérivable sur son ensemble de définition (car la dérivée $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ de th ne s'annule jamais), qui vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \operatorname{argth} x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \operatorname{argth} x = +\infty$, caractérisée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]-1, 1[, \quad y = \operatorname{th} x \iff x = \operatorname{argth} y.$$

Comme la courbe de th admettait deux asymptotes horizontales ($y = 1$ et $y = -1$), la courbe de argth admet deux asymptotes verticales ($x = 1$ et $x = -1$).

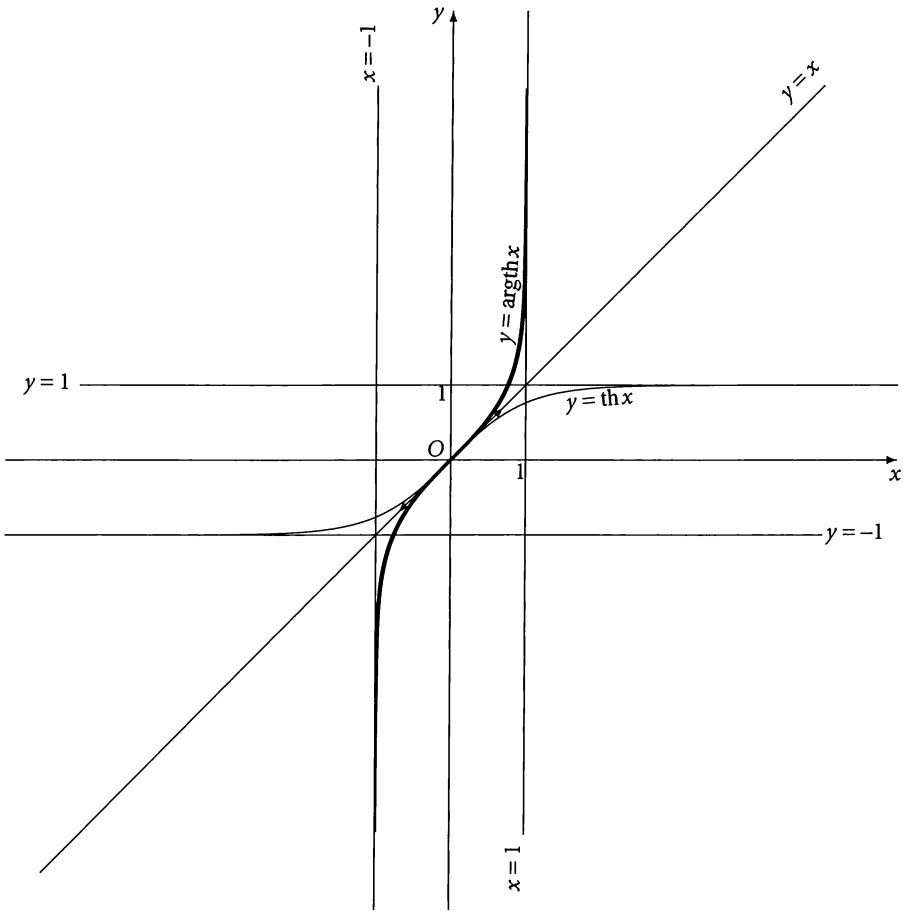
D'autre part, en application de la formule de dérivation de la fonction réciproque, on a, pour tout $y \in]-1, 1[$ tel que $y = \operatorname{th} x$, $\operatorname{argth}'(y) = \dfrac{1}{\operatorname{th}'(x)} = \dfrac{1}{1-\operatorname{th}^2 x} = \dfrac{1}{1-y^2}$.

On a prouvé que :

$$\forall y \in]-1, 1[, \quad \operatorname{argth}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

(On a bien sûr aussi $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.)

Voici l'aspect de la courbe représentative de argth :



Expression logarithmique de argth

Ici aussi, on peut résoudre en y l'équation définissant $y = \operatorname{argth} x$, en revenant à la définition à partir des exponentielles de la fonction th :

$$y = \operatorname{argth} x \iff x = \operatorname{th} y \iff x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \iff (e^{2y}+1)x = e^{2y}-1$$

$$\iff e^{2y}(x-1) = -1-x \iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \iff y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Nous avons ainsi trouvé les *expressions logarithmiques de l'argument tangente hyperbolique* :

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

3.6 Exercices

Exercice 3.1.

1. Calculer $\arcsin(-x)$, $\arccos(-x)$, $\arctan(-x)$ en fonction de $\arcsin x$, $\arccos x$ et $\arctan x$, respectivement.
2. Simplifier les expressions suivantes : $\sin(\arcsin x)$; $\sin(\arccos x)$; $\cos(\arccos x)$; $\cos(\arcsin x)$; $\tan(\arctan x)$. (On précisera dans chaque cas le domaine de validité.)
3. Établir des formules pour :
   a) $\sin(\arctan x)$; b) $\cos(\arctan x)$;
   c) $\tan(\arcsin x)$; d) $\tan(\arccos x)$.
   (On précisera dans chaque cas le domaine de validité.)

Exercice 3.2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f, sa parité, son ensemble de dérivabilité, calculer $f'(x)$ et calculer $f(1)$.
2. Déduire de l'étude précédente que
$$\forall x > 0, \quad \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$
3. Quelle formule analogue a-t-on pour $x < 0$?

Exercice 3.3. Après avoir précisé leurs ensembles de définition, représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \arccos(\cos x)$
2. $f_2 : x \longmapsto \arcsin(\sin x)$
3. $f_3 : x \longmapsto \arctan(\tan x)$
4. $f_4 : x \longmapsto \arccos(\sin x)$
5. $f_5 : x \longmapsto \arcsin(\cos x)$

Exercice 3.4. Démontrer les égalités suivantes (en précisant leur domaine de validité).

1. $\tan(2\arctan x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.
2. $\cos(4\arctan x) = \dfrac{x^4 - 6x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 3.5. Simplifier l'expression : $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$. (On précisera le domaine de validité de la formule obtenue).

Exercice 3.6. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[-1, 1]$. Quelle particularité de f permet de réduire son domaine d'étude ?
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$. Déterminer f'.
3. Montrer que :
   - si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$;
   - si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $f(x) = -2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$.

   Donner, sur ces deux intervalles, une expression de $f(x)$ utilisant la fonction arccos.
4. Tracer la courbe représentant f.
5. La fonction f est-elle dérivable en -1 ? en 0 ? en 1 ?

Exercice 3.7. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

1. Étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$. En déduire que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En déduire aussi que f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. Quelle propriété de f permet de réduire le domaine d'étude ?
2. Calculer la dérivée $f'(x)$.
3. Montrer que si x appartient à $[-1, 1]$, alors $f(x) = 2\arctan x$.
4. Exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan x$ pour $x > 1$.
5. Tracer la courbe représentant f.
6. La fonction f est-elle dérivable en -1 ? en 1 ?

Exercice 3.8. Étudier la fonction $f : x \longmapsto x\arctan(x)$ et en donner une représentation graphique.
(*Pour l'étude de la branche infinie, on pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.2, et se ramener en 0 avec le changement de variable* $y = \frac{1}{x}$).

Exercice 3.9. Soit $a > 0$. On considère la fonction : $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)$.

1. Quel est son domaine de dérivabilité ? Calculer sa dérivée.
2. Pour quelles valeurs de x a-t-on :

$$\arctan x + \arctan a = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) ?$$

3. Donner une autre formule pour les autres valeurs de x, puis pour $a < 0$.

Exercice 3.10. En utilisant les résultats de l'exercice précédent 3.9, démontrer les formules suivantes :

1. $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$
2. $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$
   Que vaut $\arctan 2+\arctan 3$? et $\arctan 2+\arctan 5+\arctan 8$?
3. Démontrer la formule de John Machin :
$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Exercice 3.11. Démontrer les formules

1. $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)=\mathrm{e}^x$. Quelle est la relation analogue (en trigonométrie circulaire) de cette relation ?
2. $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$;
3. $\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(y)+\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(y)$;
4. $\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$.
5. Donner, en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$, des expressions de $\mathrm{sh}(2x)$ et de $\mathrm{ch}(2x)$.

Exercice 3.12.

1. Démontrer pour tout x réel : $\arctan(\mathrm{sh}(x))=\arcsin(\mathrm{th}(x))$.
2. Démontrer pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ on a : $2\ \mathrm{argth}(\tan(x))=\mathrm{argth}(\sin(2x))$.

Exercice 3.13. On pose $f(x)=\arctan(\mathrm{sh}(x))$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante.
2. Montrer que l'image de $\mathbb{R}$ par f est l'intervalle : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
3. Montrer que la fonction f admet pour fonction réciproque la fonction g définie par : $g(y)=\mathrm{argsh}(\tan(y))$.

CHAPITRE 4

Calcul intégral

L'intégration est de moins en moins étudiée au lycée. Nous présentons une théorie élémentaire de l'intégration (intégration au sens des primitives) permettant de calculer rapidement et efficacement la plupart des primitives ou intégrales dont on a besoin en sciences. Nous réviserons ou découvrirons la technique d'intégration par parties et nous découvrirons la technique du changement de variable.

4.1 Rappels sur les primitives

Définition 4.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F, définie sur I, dérivable sur I et telle que $F' = f$.

Lorsqu'on parle de primitives, il vaut toujours mieux se placer sur un *intervalle*. Il est toujours possible de considérer une primitive de fonction définie sur une réunion d'intervalles, mais ce n'est en général pas très utile. Les primitives utiles sont les primitives sur un intervalle.
On a admis au lycée la propriété fondamentale suivante, qui ne peut être démontrée dans le cadre de ce cours :

Proposition 4.2 Toute fonction continue sur un intervalle I possède au moins une primitive sur I.

Le résultat suivant, lui, est facile à démontrer.

Proposition 4.3 Deux primitives d'une même fonction f sur l'*intervalle* I, diffèrent d'une constante.

Preuve Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors $F' = G' = f$, et, la dérivation étant linéaire, $F' - G' = (F-G)' = f - f = 0$. La fonction $F-G$ admet donc la fonction nulle comme dérivée : on sait que cela signifie que la fonction

$F-G$ est constante sur tout intervalle de son ensemble de définition [1]. Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, on a $(F-G)(x) = K$, c'est-à-dire $F(x)-G(x) = K$, ou encore $F(x) = G(x)+K$. F et G diffèrent donc bien d'une constante. □

Notation : si f est une fonction définie sur un intervalle I, on notera $\int f(x)\,dx$ l'ensemble des primitives de la fonction f sur cet intervalle. Par exemple, on notera $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, pour signifier que l'ensemble des primitives de la fonction $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est formé des fonctions de la forme $x \longmapsto \frac{x^2}{2} + C$; en fait cette notation est relativement dangereuse, car le symbole = que nous voyons dans la formule ci-dessus n'a pas vraiment le sens usuel. Pour répondre à la question « *Déterminer une primitive de la fonction* $x \longmapsto x$ », on écrira : « Une primitive de la fonction $x \longmapsto x$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ » ; pour répondre à la question « *Déterminer les primitives de la fonction* $x \longmapsto x$ » (sous entendu : on demande « *toutes* » les primitives de cette fonction), on répondra : $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$. Il faut se rappeler que lorsqu'on utilise cette notation d'*intégrale indéfinie*, il y a toujours une constante sous-entendue dans cette écriture.

Voici maintenant une propriété liée à la linéarité de la dérivation (c'est-à-dire au fait que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et aussi que $(\lambda f)' = \lambda f'$ lorsque λ est une constante) :

Proposition 4.4 La somme d'une primitive de f et d'une primitive de g est une primitive de $(f+g)$.
Si F est une primitive de f sur I et si λ est un réel, alors une primitive de λf est λF.

Avec la notation qu'on vient d'introduire, on a donc :
$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ et $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$.
Ces égalités se comprennent à une constante près.

Exemple classique : Examinons la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Cette fonction f est continue sur la réunion $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Comme la notion de primitive se définit sur un intervalle, il y a lieu d'examiner ce qui se passe sur chacun des intervalles. Sur $]0,+\infty[$, on sait que $x \longmapsto \ln x$ est une primitive de f.

[1] Si f (et donc F et G) est définie sur une réunion d'intervalles, la constante peut être différente sur chaque intervalle formant un morceau non connecté aux autres morceaux de l'ensemble de l'ensemble de définition. Par exemple, la fonction qui vaut 1 sur $]0,+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,0[$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais ce n'est pas une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$, car $\mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ n'est pas un intervalle, mais la réunion de deux intervalles non reliés. Voir aussi l'exercice 3.2 p.74

On peut donc écrire : sur $\mathbb{R}^{*+}$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C_1$

Sur $]-\infty, 0[$, on vérifie que $x \longmapsto \ln(-x)$ est une primitive de f, et on a donc : sur $\mathbb{R}^{*-}$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C_2$.

Comme $|x| = x$ ou $-x$ suivant que x est positif ou négatif, on voit que la fonction définie par $F(x) = \ln|x|$ convient partout.

On écrit souvent $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$. Mais si cette notation est tolérée, elle n'est pas tout à fait correcte, si on cherche à l'appliquer sur $\mathbb{R}^*$. Cette notation est vraie sur $\mathbb{R}^{*+}$, elle est aussi vraie sur $\mathbb{R}^{*-}$, mais pas vraiment sur $\mathbb{R}^*$. En effet, toutes les primitives de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ ne sont pas de cette forme : il y a aussi par exemple la fonction F_0 définie par $F_0(x) = \ln x + 1$ pour $x > 0$ et $F_0(x) = \ln(-x)$ pour $x < 0$ (on a pris $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$) ; on peut prendre une constante différente sur chaque intervalle non connecté de l'ensemble de définition. Cette subtilité n'est pas très gênante, car en pratique, on n'a jamais besoin des primitives d'une fonction ailleurs que sur un intervalle, en particulier pour les calculs d'intégrales.

4.2 Intégrales

4.2.1 Rappels

Définition 4.5 Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres appartenant à l'intervalle I. Alors l'intégrale entre a et b de la fonction f est le nombre noté $\int_a^b f(x)\,dx$ qui vaut $F(b) - F(a)$, F étant une primitive quelconque de la fonction f sur I. a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

Proposition 4.6 Cette définition est *cohérente* : avec les notations ci-dessus, le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F que l'on choisit pour f.

Preuve Si on prend une autre primitive G de f sur I, on a vu qu'il existe une constante K telle que $G(x) = F(x) + K$ pour tout $x \in I$. En particulier, on a $G(b) = F(b) + K$ et $G(a) = F(a) + K$, donc

$G(b) - G(a) = \big(F(b) + K\big) - \big(F(a) + K\big) = F(b) - F(a)$. □

On note $\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Dans cette écriture, x est une variable *muette* : on peut la remplacer par n'importe quelle lettre (en évitant une lettre utilisée dans les bornes, et bien sûr la lettre d pour éviter dd !)

et on peut donc aussi écrire

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(w)\,\mathrm{d}w \ldots$$

On lit aussi ce symbole « somme de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ »

4.2.2 Propriétés immédiates de l'intégrale

Relation de Chasles

Proposition 4.7 Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Pour tous $a, b, c \in I$, on a $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.
En particulier, on a $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve C'est évident en appliquant la définition, en utilisant une primitive F de f : $F(c)-F(a) = (F(c)-F(b))-(F(b)-F(a))$, $F(a)-F(a) = 0$ et enfin $F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a))$ □

Linéarité

Proposition 4.8 On suppose f et g continues sur l'intervalle I et on suppose que λ est un réel ; alors pour tous $a, b \in I$, on a :
$\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve C'est évident grâce à la linéarité de la dérivation. □

Positivité

Attention : Pour tout ce paragraphe, on a besoin que les bornes des intégrales soient « dans le bon sens », c'est-à-dire que dans les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ que l'on va considérer, a, la borne inférieure *doit être* plus petite que la borne supérieure b. Faute de la vérification de cette condition, on ne doit pas appliquer ces propriétés de positivité.

Proposition 4.9 Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b dans I. On suppose que $a < b$ et qu'on a $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ (c'est-à-dire : $\forall x \in [a, b], f(x) \geqslant 0$).
Alors on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Preuve Il suffit ici aussi de considérer une primitive F de f ; F est une fonction croissante sur l'intervalle $[a,b]$, puisque sa dérivée f' est positive (ou nulle) sur cet intervalle. Comme $a < b$ et que F est croissante, on a en particulier $F(a) \leqslant F(b)$, donc $F(b) - F(a) \geqslant 0$, c'est-à-dire exactement $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. □

En corollaire, voici une proposition qu'on retient en disant qu'on peut « intégrer des inégalités ».

Proposition 4.10 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b dans I. On suppose que $a < b$ et qu'on a $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ (c'est-à-dire : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$).
Alors on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Preuve Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction $g-f$, puis d'utiliser la linéarité de l'intégration. □

4.2.3 Expression d'une primitive d'une fonction

On peut interpréter la définition d'une intégrale de la façon suivante :

Proposition 4.11 Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a. Pour tout x appartenant à I, posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Preuve Si G est une primitive de f sur I, on sait que
$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[G(t)\right]_a^x = G(x) - G(a)$.
Puisque $G(a)$ est une constante, en dérivant, on obtient $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, donc F est bien une primitive de f et il est clair que $F(a) = 0$. □

4.2.4 Aire

En Terminale, l'intégrale a été introduite comme aire d'une partie du plan. Nous admettrons que notre présentation de l'intégrale conserve cette propriété :

Proposition 4.12 Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$). On considère sa représentation graphique dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Alors l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction f et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est, exprimée en unités d'aire,

$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. L'unité d'aire est l'aire du rectangle [2] construit sur les deux vecteurs de base du repère dans lequel on représente la fonction f.

4.3 Quelques techniques de calcul intégral

4.3.1 Les primitives usuelles

Il faut reconnaître les dérivées des fonctions usuelles (y compris les dérivées des « nouvelles fonctions »). Le tableau suivant résume quelques primitives usuelles, en donnant une primitive F de la fonction f (penser à ajouter une constante si on demande *toutes* les primitives, ou si on utilise le symbole d'intégrale indéfinie).

Condition	Intervalle(s) de définition	$f(x)$	$F(x)$
Si $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$]0,+\infty[$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
	$\mathbb{R}$	e^x	e^x
	$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$
	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$
	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$
	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{argsh}\,x$
	$]1,+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argch}\,x$
$(a \neq 0)$		$g'(ax+b)$	$\frac{g(ax+b)}{a}$

[2] ou du parallélogramme, si le repère n'est pas orthogonal

4.3.2 Intégration par parties

Cette technique, souvent déjà vue en Terminale, doit être maîtrisée et appliquée avec soin.

Intégration par parties dans un calcul d'intégrale

Proposition 4.13 Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ et dont les dérivées sont *continues* sur ce même intervalle (ce qui signifie simplement que u et v sont des fonctions de classe C^1). Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

Preuve La fonction $f : x \longmapsto u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$ admet comme primitive la fonction F définie par $F(x) = u(x)v(x)$; on a donc $\displaystyle\int_a^b (u(x)v'(x)+u'(x)v(x))\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$ et on conclut en utilisant la linéarité de l'intégrale. □

Remarquons que la formule (4.1) peut aussi s'écrire

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

ce qui est logique, puisque u et v jouent des rôles identiques. Le terme $\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$ est ce qu'on appelle le « terme tout intégré ».

4.3.3 Intégration par parties dans un calcul de primitive

Cette méthode d'intégration par parties fonctionne aussi dans le cadre d'un calcul de primitive. Pour u et v des fonctions dérivables, et à dérivée continue sur un intervalle I (c'est-à-dire u et v de classe C^1 sur I), on a, pour tout $x \in I$:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big] - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans cette formule, il faut comprendre que pour le terme entre crochets (tout intégré), les crochets ne servent à rien ($\Big[u(x)v(x)\Big] = u(x)v(x)$), si ce n'est à rappeler la formule d'intégration par parties des intégrales.

Exemple classique :
Déterminons les primitives, sur $\mathbb{R}^{*+} =]0,+\infty[$, de la fonction ln.
On connaît sa dérivée (c'est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$), on va s'en servir pour calculer la primitive de la façon suivante :

$\int \ln x \, dx = \int 1 \ln x \, dx$; on pose $\ln x = u(x)$ et $v'(x) = 1$, donc on peut prendre $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$.

On a donc $\int \ln x \, dx = \left[(\ln x)\, x\right] - \int \frac{1}{x}\, x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$.

Remarquons que dans ce calcul, la constante apparaît explicitement à la dernière étape seulement, auparavant elle est toujours implicitement présente dans l'intégrale indéfinie.

4.3.4 Changement de variable

Cette technique, qui n'est pas enseignée au lycée, est indispensable à acquérir. Elle est basée sur la formule de dérivation d'une fonction composée, vue à la proposition 1.23 p.20 : $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi'$.

Changement de variable dans une intégrale

Proposition 4.14 On considère une fonction φ dérivable sur un intervalle I, et $a, b \in I$; soit J un intervalle contenant $\varphi(I)$.
Soit f une fonction définie et continue sur J, et soit F une primitive de f sur J.
Alors on a

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du \tag{4.3}$$

Preuve $F \circ \varphi$ est une primitive sur I de la fonction $(f \circ \varphi)\varphi'$, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction $x \longmapsto F(\varphi(x))$ est la fonction $x \longmapsto f(\varphi(x))\varphi'(x)$.
En particulier, on a donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx &= \left[F(\varphi(x))\right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \left[F(u)\right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du.\end{aligned}$$

□

Dans ce calcul, en quelque sorte, on a posé $u = \varphi(x)$. C'est ce genre de technique qu'on essaiera de retenir, mais avec une règle bien précise : on doit aussi s'occuper des « éléments différentiels » dx et du.
On utilise la règle [3] suivante : si dans un calcul d'intégrale, on pose $u = \varphi(x)$, alors on doit aussi poser $du = \varphi'(x) \, dx$.

[3] Cette règle est à rapprocher de l'écriture utilisée surtout en physique : si $u = \varphi(x)$, on peut écrire la dérivée de φ sous la forme : $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$; en multipliant formellement par dx, on retrouve la formule $du = \varphi'(x) \, dx$.

De plus il faut aussi s'occuper des bornes : la borne $x = a$ dans l'intégrale où la variable est x se transforme en une borne où $u = \varphi(x) = \varphi(a)$ dans une intégrale où c'est u qui est la variable. Même chose pour la borne b (pour x) : elle devient $\varphi(b)$ dans l'intégrale où c'est u la variable.

La formule (4.3) peut s'appliquer dans les deux sens, comme nous allons le voir dans les exemples qui suivent :

Exemple 1 : Calculer $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On suggère d'utiliser le changement de variable $u = \varphi(x) = x^2$. Si on veut appliquer rigoureusement la formule (4.3), on écrira

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \varphi'(x)\sqrt{1-\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\varphi(\frac{1}{3})}^{\varphi(\frac{1}{2})} \sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} (1-u)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-u)^{\frac{3}{2}}}{(-1)\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{1}{3}\left[\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{16\sqrt{2}}{27}\right]$$

$$I = \frac{16\sqrt{2}}{81} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Exemple 2 : Calculer $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Cet exemple est presque le même que le précédent, mais ici, le changement de variable $u = x^2$ ne serait pas efficace (on pourra toujours essayer). En revanche, on peut utiliser le changement de variable $x = \sin t = \varphi(t)$ Il faut alors exprimer les bornes sous la forme $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$:
$\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \varphi(\frac{\pi}{6})$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \varphi(\frac{\pi}{3})$.
On a donc :

$$I = \int_{\varphi(\frac{\pi}{6})}^{\varphi(\frac{\pi}{3})} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi'(t)\sqrt{1-\varphi(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\sqrt{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\,|\cos t|\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \overset{(4)}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}$$

En pratique :
On ne retient pas la formule (4.3) de la proposition 4.14, mais on rédige avec la technique utilisée ci-dessous pour traiter à nouveau les deux exemples qu'on vient de voir :

Exemple 1 : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

On pose $x^2 = u$, donc $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ et $x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$; pour $x = \frac{1}{3}$, $u = \frac{1}{9}$ et pour $x = \frac{1}{2}$, $u = \frac{1}{4}$.

Donc $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}(x\,\mathrm{d}x) = \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-u}\frac{\mathrm{d}u}{2}\ldots$

Exemple 2 : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

On pose $x = \sin t$, donc $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$; pour avoir $x = \frac{1}{2}$, on peut prendre $t = \frac{\pi}{6}$ et pour avoir $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on peut prendre $t = \frac{\pi}{3}$.

On a donc $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2 t}(\cos t\,\mathrm{d}t)\ldots$

Ce qu'il faut retenir pour un changement de variable dans une intégrale :
- on n'oublie pas de changer les bornes ;
- on fait le changement de variable d'un seul coup : il ne faut pas que dans une expression il y ait à la fois du x et du t ou du x et du u, et pire, une borne correspondant à x alors que la variable a déjà été changée ;
- on pense à modifier le $\mathrm{d}x$, avec la règle : si $x = \varphi(t)$, alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, si $u = \varphi(x)$, alors $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$;
- si dans une intégrale où x est la variable on veut faire un changement de variable du type $u = \varphi(x)$, ceci n'a d'intérêt que si on arrive à faire apparaître facilement $\varphi'(x)$ en facteur dans la fonction à intégrer ; on ne peut pas remplacer $\mathrm{d}x$ par $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi'(x)}$ puisque les variables x et u ne doivent pas cohabiter dans la même expression.

Changement de variable dans un calcul de primitive

On peut appliquer la même méthode de changement de variable pour un calcul de primitive : formellement, ça marche de la même façon, bien que la justification soit à peine plus délicate :

Proposition 4.15 Soit f une fonction définie sur un intervalle J. On suppose que φ est une fonction dérivable, à dérivée continue, et réalisant une bijection d'un intervalle I, sur l'intervalle J. En posant $x = \varphi(t)$, donc $t = \varphi^{-1}(x)$
Alors $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, en ce sens que si G est une primitive sur J de la

fonction $t \longmapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$, et si F est une primitive de la fonction f, on a, pour tout $x \in I$:

$$F(x) = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Preuve Lorsqu'on dérive par rapport à x l'expression $H(x) = G(\varphi^{-1}(x))$, on obtient :
$H'(x) = G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\,(\varphi^{-1})'(x)$
Or, on a bien sûr $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$ et la formule de la dérivée d'une fonction réciproque donne $(\varphi^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$, donc
$H'(x) = f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))\dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$, H est bien une primitive de f. □

En pratique :
On travaille avec les intégrales indéfinies comme avec les intégrales « normales », et on applique la technique de changement de variable de la même façon, sauf que s'il n'y a pas à s'occuper des bornes (dans des intégrales indéfinies, il n'y a pas de bornes), en revanche, il ne faut pas oublier de revenir à la variable initiale à la fin.

Exemple 3 : Déterminer les primitives de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$.
C'est bien sûr sur $\mathbb{R}$ que l'on fera cette recherche, puisque la quantité sous le radical ne s'annule jamais.
On utilisera le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$ (à cause de la formule $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, donc $1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$)
Les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Avec le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$, on a $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$, donc

$$F(x) = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}(\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t) = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t}\,\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t = \int \operatorname{ch} t\,\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$$

(on sait que $\operatorname{ch} t \geqslant 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$)

$$F(x) = \int \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} + 2}{4}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch} 2t}{2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} + C = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{2} + C$$

(car $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$) ; il ne faut pas oublier maintenant de revenir à la variable x : sachant que $x = \operatorname{sh} t$, on a $t = \operatorname{argsh} x$, donc

$$F(x) = \frac{\operatorname{argsh} x}{2} + \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)}{2} + C = \frac{\operatorname{argsh} x}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + C$$

(on a vu, lors du calcul de la dérivée de argsh, que $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x) = \sqrt{1+x^2}$).
Finalement, on a prouvé que $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{argsh}\, x + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$.

À retenir :
- dans un calcul de primitive, lorsqu'on fait un changement de variable, on ne s'occupe pas des bornes ;
- mais on pense à revenir à la variable initiale à la fin du calcul ;
- on pense aussi à la constante ;
- dans un calcul de primitive comme dans un calcul d'intégrale, lorsqu'on fait un changement de variable, on n'oublie pas de s'occuper aussi du terme « différentiel » $\mathrm{d}x$ (ou $\mathrm{d}t$, ou $\mathrm{d}u\ldots$)
- dans les deux cas, aussi, on évite absolument de mélanger les variables : on fait le changement de variable d'un seul coup, après l'avoir préparé le mieux possible.

4.3.5 Intégration d'une fonction paire ou impaire sur un intervalle « symétrique »

La technique du changement de variable permet de montrer de façon élégante la propriété suivante, qui peut souvent être utile ; on va montrer que l'intégrale sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine (du type $[-a, a]$) d'une fonction paire ou impaire se simplifie.

Proposition 4.16 Soit $a > 0$.
Si f est une fonction paire, alors on a :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si f est une fonction impaire, alors on a :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Preuve Le début du calcul est le même dans les deux cas : on utilise la relation de Chasles et on fait le changement de variable $t = -x$ dans une des deux intégrales :
$I = \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.
Dans l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$, on pose $x = -t$, on a donc $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$, et en ce qui concerne les bornes, si $x = -a$, on a $t = a$ et si $x = 0$, alors $t = 0$. Donc $I_1 = \displaystyle\int_{a}^{0} f(-t)(-\,\mathrm{d}t) = \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t$.
C'est maintenant qu'il faut distinguer les cas selon que f est paire ou impaire.

- *Si f est paire* : on a $f(-t) = f(t)$, donc $I_1 = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = I_2$, donc $I = I_1 + I_2 = 2I_2 = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- *Si f est impaire* : on a $f(-t) = -f(t)$, donc $I_1 = \int_0^a (-f(t))\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = -I_2$, donc $I = I_1 + I_2 = -I_2 + I_2 = 0$.

□

4.4 Intégration des fractions rationnelles

4.4.1 Généralités sur les fractions rationnelles

Définition 4.17 Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes (le polynôme du dénominateur n'étant pas le polynôme nul).

Dans le cadre de ce cours, nous ne considérerons que des fractions rationnelles à coefficients réels, et nous assimilerons une fraction rationnelle à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui lui est naturellement associée. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent le dénominateur.
Remarquons qu'on peut toujours considérer qu'un polynôme est une fraction rationnelle, puisque c'est le quotient de lui-même par le polynôme constant 1.
Nous essaierons de ne considérer que des fractions rationnelles dont le dénominateur est complètement factorisé, en produit de polynômes du premier degré ou du second degré sans racine réelle.
On pourra aussi toujours, si on le souhaite, considérer que le polynôme du dénominateur est *unitaire*, c'est-à-dire que son *coefficient dominant* vaut 1. (Le coefficient dominant d'un polynôme est le coefficient de son terme de plus haut degré). Si ce n'est pas le cas, il suffit de diviser numérateur et dénominateur par ce coefficient dominant. Par exemple, pour la fraction rationnelle $F = \dfrac{3X+4}{2X^2+5X+2} = \dfrac{3X+4}{(X+2)(2X+1)}$, on peut écrire (même si ça semble plus compliqué) : $F = \dfrac{\frac{3}{2}X+2}{X^2+\frac{5}{2}X+1} = \dfrac{\frac{3}{2}X+2}{(X+2)(X+\frac{1}{2})}$
On essaiera aussi de ne considérer que des fractions rationnelles simplifiées au maximum...
Il est très facile de vérifier, avec les règles d'opérations usuelles que la somme, la différence, le produit, le quotient de fractions rationnelles donne toujours une fraction rationnelle.

Définition 4.18 Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle.
Son degré est $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$.

On démontre et nous admettrons le résultat suivant, qui généralise un résultat analogue sur les polynômes :

Proposition 4.19 Si F et G sont deux fractions rationnelles, alors
$\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$ et $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F + \deg G)$.
De plus, si $\deg F \neq \deg G$, alors $\deg(F+G) = \max(\deg F + \deg G)$.

4.4.2 Partie entière d'une fraction rationnelle

Nous admettrons la proposition suivante (qui se démontre très facilement en faisant la division euclidienne de A par B) :

Proposition 4.20 (et définition) Pour toute fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$, il existe un unique polynôme Q et une unique fraction rationnelle $G = \dfrac{R}{B}$, de degré strictement négatif, telle que $F = Q + G = Q + \dfrac{R}{B}$.
Q est la *partie entière* de la fraction rationnelle F.

Une première remarque est que si $\deg F < 0$, le polynôme Q, est le polynôme nul. La partie entière d'une fraction rationnnelle de degré négatif est nulle.
Une deuxième remarque est que si Q n'est pas nul, en comparant les degrés des deux expressions, on a $\deg Q = \deg F$.

4.4.3 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Définition 4.21 On appelle élément simple de première espèce une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{\alpha}{(X-a)^p}$ avec α, a des réels et $p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle élément simple de deuxième espèce une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{\beta X + \gamma}{(X^2+bX+c)^q}$ avec β, γ des réels, $q \in \mathbb{N}^*$, et b, c des réels tels que $X^2 + bX + c$ soit un polynôme *irréductible* dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire sans racine réelle, impossible à factoriser plus, donc tel que son discriminant vérifie $\Delta = b^2 - 4c < 0$.

Nous pouvons maintenant énoncer (sans démonstration) le théorème de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle :

Théorème 4.22 *Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle. On suppose que B est un polynôme unitaire, dont la factorisation complète s'écrit :*
$$B = (X-a_1)^{p_1}(X-a_2)^{p_2}\cdots(X-a_r)^{p_r}(X^2+b_1X+c_1)^{q_1}\cdots(X^2+b_sX+c_s)^{q_s}$$
$$B = \prod_{i=1}^{r}(X-a_i)^{p_i}\prod_{j=1}^{s}(X^2+b_jX+c_j)^{q_j}$$
(les trinômes $X^2 + b_jX + c_j$ étant tous irréductibles : $b_j^2 - 4c_j < 0$)
Alors on peut écrire de façon unique

$$F = Q + \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k_i=1}^{p_i}\frac{\alpha_{k_i}}{(X-a_i)^{k_i}}\right) + \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k_j=1}^{q_j}\frac{\beta_{k_j}X+\gamma_{k_j}}{(X^2+b_{k_j}X+c_{k_j})^{k_j}}\right)$$

(Q est un polynôme, c'est la partie entière de la fraction rationnelle F ; les autres éléments de cette décomposition de F sont tous des éléments simples de première ou de deuxième espèce.)

L'important dans ce théorème est de comprendre comment il fonctionne. Il indique que dans la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, on trouve tous les éléments simples possibles dont le dénominateur divise le dénominateur de F.

Exemple 1 : Si $F = \dfrac{3X^5+2}{(X-1)^3(X^2+1)}$, dans la décomposition, il y aura un élément simple du type $\dfrac{a}{X-1}$, un élément simple du type $\dfrac{b}{(X-1)^2}$, un élément simple du type $\dfrac{c}{(X-1)^3}$, mais pas d'élément simple du type $\dfrac{d}{(X-1)^4}$, car $(X-1)$, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$ divisent tous les trois le dénominateur $B = (X-1)^3(X^2+1)$ de F, alors que $(X-1)^4$ ne divise pas B ; de même il y aura aussi un élément simple de deuxième espèce (X^2+1 n'a évidemment pas de racine réelle) du type $\dfrac{dX+e}{X^2+1}$, mais certainement pas d'élément simple du type $\dfrac{d'X+e'}{(X^2+1)^2}$... Il ne faudra pas non plus oublier la partie entière de F, qui est un polynôme de même degré que F, c'est-à-dire de degré $5-5=0$, un polynôme de degré 0 est une constante.
Le théorème de décomposition en éléments simples permet donc d'affirmer qu'il existe C, a, b, c, d, e réels tels que

$$F = \frac{3X^5+2}{(X-1)^3(X^2+1)} = C + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{dX+e}{X^2+1}$$

Exemple 2 : $G = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)(X+3)(X^2+X+1)^2}$
En appliquant le théorème, on sait qu'on devra chercher la décomposition en éléments simples de G sous la forme

$$G = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{X+3} + \frac{dX+e}{X^2+X+1} + \frac{fX+g}{(X^2+X+1)^2}$$

(La partie entière de G est bien évidemment nulle).

4.4.4 Intégration des éléments simples

L'immense intérêt de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle est qu'elle transforme cette fraction rationnelle qui est sous la forme d'un quotient en général compliqué à intégrer (à part le cas très particulier où on se trouve en présence d'une expression du type $\dfrac{u'}{u}$) en une somme de fractions rationnelles de forme standard, que l'on saura (en théorie) plus facilement intégrer.

En fait, nous devrions d'ailleurs plutôt parler de *primitivation* des éléments simples, puisque nous allons ici donner des techniques permettant de trouver une primitive de presque tous les éléments simples ; ensuite, on pourra utiliser ces primitives dans des calculs d'intégrale.

Pour les éléments simples de première espèce, c'est particulièrement simple : on sait que

- $\displaystyle\int \frac{\alpha}{x-a}\,\mathrm{d}x = \alpha \ln|x-a| + C$ (ne pas oublier les valeurs absolues)
- Pour $k \geqslant 2$,
$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = \alpha \int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}x = \alpha \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{\alpha}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

Pour un élément simple de deuxième espèce, avec un dénominateur de degré 2, du type $\dfrac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}$, (avec $\Delta = b^2-4c < 0$), c'est plus compliqué.
On commence par faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur :

$$\beta x+\gamma = \frac{\beta}{2}\left(2x+\frac{2\gamma}{\beta}\right) = \frac{\beta}{2}\left(2x+b-b+\frac{2\gamma}{\beta}\right) = \frac{\beta}{2}(2x+b) + K \text{ avec } K = \gamma - \frac{b\beta}{2}$$

On a donc $\dfrac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c} = \dfrac{\beta}{2}\dfrac{2x+b}{x^2+bx+c} + \dfrac{K}{x^2+bx+c}$ et[5]

$$\int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{2}\ln|x^2+bx+c| + \int \frac{K}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

Il suffit donc de savoir primitiver un terme de la forme $\dfrac{K}{x^2+bx+c}$; la solution vient de la forme canonique d'un trinôme. On écrit :

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}$$

Posons, pour simplifier, $\dfrac{-\Delta}{4} = p^2$ (avec $p>0$) (remarquons que c'est toujours possible, car ici $\Delta < 0$, donc il suffit de prendre $p = \sqrt{\dfrac{-\Delta}{4}}$).

On a donc $\dfrac{K}{x^2+bx+c} = \dfrac{K}{(x+\frac{b}{2})^2+p^2}$; on factorise p^2 au dénominateur :

$$\frac{K}{x^2+bx+c} = \frac{K}{p^2\left(\left(\dfrac{x+\frac{b}{2}}{p}\right)^2+1\right)} = \frac{K'}{\left(\frac{2x+b}{2p}\right)^2+1} \text{ avec } K' = \frac{K}{p^2}$$

Il suffit maintenant de faire le changement de variable $u = \frac{2x+b}{2p}$, $\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}u$ pour se ramener à une primitive connue :

[5] Remarquons qu'ici, la valeur absolue autour du trinôme x^2+bx+c dans l'expression $\ln|x^2+bx+c|$ n'est pas utile, car le discriminant b^2-4c étant négatif, ce trinôme est toujours strictement positif.

$\int \frac{K'}{\left(\frac{2x+b}{2p}\right)^2+1}\,dx = \int \frac{K'}{u^2+1}\,p\,du = pK'\arctan(u)+C$ et on n'oublie pas de revenir à la variable initiale :

$\int \frac{K'}{\left(\frac{2x+b}{2p}\right)^2+1}\,dx = pK'\arctan\left(\frac{2x+b}{2p}\right)+C$; compte tenu de la valeur de K', on a obtenu (ne pas essayer de retenir le résultat par cœur, il faut simplement retrouver la technique)

$\int \frac{K}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{K}{p}\arctan\left(\frac{x}{p}+\frac{b}{2p}\right)$, avec $p = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$...

Pour un élément simple de seconde espèce d'ordre plus élevé, c'est beaucoup plus compliqué, il existe des techniques basées sur l'intégration par parties pour descendre d'une unité l'exposant du dénominateur, nous n'étudierons pas ces cas dans le cadre de ce cours.

4.4.5 Techniques de détermination de la décomposition en éléments simples

On a vu que l'on peut prévoir la forme de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. A priori, on pourrait donc toujours déterminer les coefficients inconnus de cette décomposition en réduisant au même dénominateur et en identifiant les numérateurs, mais en pratique, cette méthode est bien trop compliquée. Nous allons voir ici quelques unes des techniques à connaître pour trouver facilement les différents coefficients. Nous travaillerons déjà sur les deux exemples vus plus haut :

Exemple 1 : $F(x) = \frac{3x^5+2}{(x-1)^3(x^2+1)} = C + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{dx+e}{x^2+1}$

Pour déterminer C, on peut comparer les limites à l'infini des deux membres : il est clair que $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 3$, donc $C = 3$.

Pour déterminer c : on multiplie les deux membres par $(x-1)^3$ et « on fait $x = 1$ » :

On obtient $\frac{3x^5+2}{x^2+1} = (x-1)^3C + a(x-1)^2 + b(x-1) + c + (x-1)^3\frac{dx+e}{x^2+1}$;

c'est de la forme $\frac{3x^5+2}{x^2+1} = c + (x-1)G(x)$, avec $G(x)$ qui est une fraction rationnelle définie en 1, peu importe sa valeur. Lorsqu'on remplace dans cette égalité x par 1 (c'est ce qu'on appelle « on fait $x = 1$ »), on obtient directement $\frac{5}{2} = c + (1-1)G(1) = c$, et même si on ne connaît pas encore les valeurs de a, b, d, e, on sait déjà que $c = \frac{5}{2}$.

Pour déterminer d et e simultanément : on multiplie les deux membres par (x^2+1) et « on fait $x = \mathrm{i}$ » (i est une des deux racines *complexe* du trinôme x^2+1).

On obtient $\frac{3x^5+2}{(x-1)^3} = dx + e + (x^2+1)H(x)$, $H(x)$ étant une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x = \mathrm{i}$.

En faisant $x = \mathrm{i}$, on obtient $\frac{3\mathrm{i}+2}{(\mathrm{i}-1)^3} = d\mathrm{i} + e$, et il suffit donc de déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre de gauche pour trouve à la fois les réels d et e :

$(\mathrm{i}-1)^3 = 2+2\mathrm{i}$, donc $e + d\mathrm{i} = \frac{3\mathrm{i}+2}{(\mathrm{i}-1)^3} = \frac{2+3\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \frac{(2+3\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{8} = \frac{10+2\mathrm{i}}{8} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$

On a donc trouvé $e = \frac{5}{4}$ et $d = \frac{1}{4}$.
Quand il ne reste plus que deux coefficients inconnus (ici a et b), une méthode élémentaire consiste à choisir deux valeurs de x (n'annulant aucun dénominateur !) et à les utiliser dans l'équation pour obtenir un système assez simple :
Pour $x = 0$, dans $\dfrac{3x^5+2}{(x-1)^3(x^2+1)} = 3 + \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{\frac{5}{2}}{(x-1)^3} + \dfrac{\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}{x^2+1}$, on obtient l'équation
$-2 = 3 - a + b - \frac{5}{2} + \frac{5}{4}$ donc $a - b = \frac{15}{4}$
Pour $x = -1$, dans la même équation, on obtient
$-\frac{1}{16} = 3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{5}{16} + \frac{1}{2}$ donc en multipliant tout par 16,
$-1 = 48 - 8a + 4b - 5 + 8$, soit $8a - 4b = 50$ ou encore $2a - b = \frac{25}{2}$
Il suffit donc de résoudre le système $\begin{cases} a - b = \frac{15}{4} \\ 2a - b = \frac{25}{2} \end{cases}$
On trouve aisément $a = \frac{35}{4}$ et $b = 5$.
Finalement on a obtenu

$$F(x) = \frac{3x^5+2}{(x-1)^3(x^2+1)} = 3 + \frac{\frac{35}{4}}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^3} + \frac{\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}{x^2+1}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3} + \frac{dx+e}{x^2+x+1} + \frac{fx+g}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

On détermine aisément a, b et c en multipliant cette égalité successivement par $(x+1)$ (pour « faire $x = -1$ »), par $(x+2)$ (pour « faire $x = -2$ ») puis par $(x+3)$ (pour « faire $x = -3$ »).
On trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{9}$ et $c = \frac{1}{98}$.
Pour déterminer f et g simultanément :
On multiplie l'égalité par $(x^2+x+1)^2$, puis on remplace x par une des racines complexes de x^2+x+1 ; on peut prendre $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ (qui vérifie $\mathrm{j}^3 = 1$ et $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$, donc $\mathrm{j} + 1 = -\mathrm{j}^2$).
On obtient

$$\frac{1}{(\mathrm{j}+1)(\mathrm{j}+2)(\mathrm{j}+3)} = f\mathrm{j} + g.$$

Calculons le membre de droite : on a

$$\begin{aligned} (\mathrm{j}+1)(\mathrm{j}+2)(\mathrm{j}+3) &= \mathrm{j}^3 + 6\mathrm{j}^2 + 11\mathrm{j} + 6 \\ &= 1 + 6(-\mathrm{j} - 1) + 11\mathrm{j} + 6 \\ &= 1 + 5\mathrm{j}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} fj+g &= \frac{1}{(j+1)(j+2)(j+3)} \\ &= \frac{1}{1+5j} = \frac{1+5j^2}{(1+5j)(1+5j^2)} \\ &= \frac{1-5-5j}{1+5(j+j^2)+25j^3} \\ g+fj &= \frac{-4-5j}{1-5+25} \\ &= -\frac{4}{21} - \frac{5}{21}j \end{aligned}$$

En identifiant, on trouve donc $g = -\frac{4}{21}$ et $f = -\frac{5}{21}$

Pour déterminer d, on peut avoir recours à la méthode suivante : on multiplie les deux membres de l'égalité par x et on fait tendre x vers l'infini (cette technique ne fonctionne qu'avec des fractions rationnelles de degré négatif).
On a clairement $\lim_{x\to\infty} xG(x) = 0$, et pour le membre de gauche, on trouve

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3} + \frac{dx+e}{x^2+x+1} + \frac{fx+g}{(x^2+x+1)^2}\right) = a+b+c+d.$$

Comme on connaît déjà a, b et c, on trouve facilement

$$d = -a-b-c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{98} = \frac{-441+98-9}{2\times 9\times 49} = -\frac{352}{882} = -\frac{176}{441}$$

Pour déterminer e qui est le dernier coefficient, on utilisera la valeur $x = 0$:
$G(0) = \frac{1}{6}$ et pour $x = 0$, le second membre devient $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + e + g$, d'où l'équation

$$e = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{18} - \frac{1}{294} + \frac{4}{21} = \frac{588-1764+196-12+672}{8\times 9\times 49} = -\frac{320}{3528} = -\frac{40}{441}$$

Finalement, on a trouvé :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{9}}{x+2} + \frac{\frac{1}{98}}{x+3} + \frac{-\frac{176}{441}x - \frac{40}{441}}{x^2+x+1} + \frac{-\frac{5}{21}x - \frac{4}{21}}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

Exemple 3 : Soit $H(x) = \dfrac{3x^5+4x^3+2x^2-1}{(x+1)(x-2)}$.
Ici le plus difficile est de déterminer la partie entière (qui est un polynôme de degré 3). Il est facile de prévoir que $H(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$H(x) = Q(x) + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-2}.$$

On détermine la partie entière $Q(x)$ en faisant la division euclidienne du numérateur $3x^5+4x^3+2x^2-1$ par le dénominateur $(x+1)(x-2) = x^2-x-2$.
On peut disposer les calculs selon l'algorithme classique de la division :

$$\begin{array}{rl|l}
3x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 1 & & x^2-x-2 \\
\cline{3-3}
-(3x^5 - 3x^4 - 6x^3) & & 3x^3+3x^2+13x+21 \\
\cline{1-1}
3x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 1 & & \\
-(3x^4 - 3x^3 - 6x^2) & & \\
\cline{1-1}
13x^3 + 8x^2 - 1 & & \\
-(13x^3 - 13x^2 - 26x) & & \\
\cline{1-1}
21x^2 + 26x - 1 & & \\
-(21x^2 - 21x - 42) & & \\
\cline{1-1}
47x + 41 & &
\end{array}$$

Cet algorithme prouve que
$3x^5+4x^3+2x^2-1 = (x^2-x-2)(3x^3+3x^2+13x+21)+(47x+41)$, donc en divisant par (x^2-x-2), on obtient
$H(x) = \dfrac{3x^5+4x^3+2x^2-1}{x^2-x-2} = (3x^3+3x^2+13x+21) + \dfrac{47x+41}{x^2-x-2}$
On a donc prouvé que la partie entière de $H(x)$ est $Q(x) = 3x^3+3x^2+13x+21$.
Pour continuer (et déterminer α et β), on peut procéder de deux façons : soit on part de l'expression initiale de $H(x) = \dfrac{3x^5+4x^3+2x^2-1}{(x+1)(x-2)} = Q(x) + \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-2}$
soit on utilise le reste de la division faite ci-dessus car on a forcément, par identification,
$\dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-2} = \dfrac{47x+41}{(x+1)(x-2)}$
Dans les deux cas, pour déterminer α, on multiplie par $(x+1)$ et « on fait $x=-1$ », on trouve $\alpha = 2$;
Pour déterminer β, on multiplie par $(x-2)$ et « on fait $x=2$ », on trouve $\beta = 45$;
Finalement, on a prouvé que
$H(x) = 3x^3+3x^2+13x+21 + \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{45}{x-2}$.

4.5 Exercices

Exercice 4.1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^1 (x^3 - 7x + 15)\,dx$;
2. $I_2 = \int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx$;
3. $I_3 = \int_{-2}^2 \sqrt{x+2}\,dx$;
4. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\,dx$;
5. $I_5 = \int_0^1 (4x+2)(x^2+x-2)^2\,dx$;
6. $I_6 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$;
7. $I_7 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$;
8. $I_8 = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \operatorname{argsh}(x^3)\,dx$.

Exercice 4.2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $J_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos x+\cos^2 x)\,dx$;
2. $J_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos^2 x+\cos^4 x)\,dx$;
3. $J_3 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x+\sin^3 x)\,dx$.

Exercice 4.3.
Pour chacune des fractions suivantes, la décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) et en donner une primitive.

1. $A_1(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$
2. $A_2(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}$
3. $A_3(x) = \frac{x^2}{x^2+3x+2}$

4. $A_4(x) = \dfrac{x^4}{x^2+3x+2}$
5. $A_5(x) = \dfrac{1}{x^3+6x^2+11x+6}$
6. $A_6(x) = \dfrac{1}{x^3+x}$
7. $A_7(x) = \dfrac{x}{x^3-4x^2+5x-2}$

Exercice 4.4. Calculer les primitives suivantes :

1. $F_1(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
2. $F_2(x) = \displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
3. $F_3(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$
4. $F_4(x) = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$
5. $F_5(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
6. $F_6(x) = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$
7. $F_7(x) = \displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$
8. $F_8(x) = \displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5+x^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4.5. Pour calculer les primitives suivantes, il faudra utiliser un changement de variables. Le changement de variable est donné dans les indications, mais vous pouvez essayer de le deviner par vous-même.

1. $G_1(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
2. $G_2(x) = \displaystyle\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
3. $G_3(x) = \displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $G_4(x) = \displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x(1-\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$
5. $G_5(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$
6. $G_6(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{sh}(2x)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4.6. Déterminer la primitive de la fonction $f : x \longmapsto |x|$, qui s'annule en $x = 1$.

Exercice 4.7. Pour calculer ces primitives, il faudra faire une ou plusieurs intégrations par parties.

1. $H_1(x) = \int \ln(x)\,dx$
2. $H_2(x) = \int \arctan(x)\,dx$
3. $H_3(x) = \int x\sin(x)\,dx$
4. $H_4(x) = \int \arcsin(x)\,dx$
5. $H_5(x) = \int x^2 \arctan(x)\,dx$
6. $H_6(x) = \int (x^3+x^2)e^{4x}\,dx$
7. $H_7(x) = \int x^2 \arctan(\sqrt{x})\,dx$
8. $H_8(x) = \int x^3 \sin(2x)\,dx$
9. $H_9(x) = \int x^2 \ln(x^6-1)\,dx$

Exercice 4.8. Calculer les intégrales suivantes, en utilisant un changement de variable (voir l'indication pour savoir lequel).

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+3}\,dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

   Quelle est l'aire du disque de rayon 1 ?

Exercice 4.9. On désigne par I et J les primitives :

$$I(x) = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx \quad \text{et} \quad J(x) = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$$

1. Calculer $I(x)+J(x)$.
2. Calculer $I(x)-J(x)$
3. En déduire $I(x)$ et $J(x)$.

Exercice 4.10.

1. Utiliser la formule d'intégration par parties pour déterminer : $\displaystyle\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$
2. En déduire : $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C.$

Exercice 4.11. Calculer les intégrales suivantes :

1. $J_1 = \displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\,\mathrm{d}x$
2. $J_2 = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{\mathrm{e}^x}{(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$
3. $J_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
4. $J_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $J_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4.12. On considère l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x.$

1. En posant : $u = \dfrac{\pi}{4} - x$, montrer l'égalité : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\Big(\frac{2}{1+\tan(u)}\Big)\,\mathrm{d}u.$
2. En déduire $I = \dfrac{\pi}{8}\ln(2)$

CHAPITRE 5

Équations différentielles

5.1 Généralités

5.1.1 Présentation

Les équations différentielles constituent l'un des chapitres les plus importants de l'analyse, car elles ont d'innombrables applications concrètes, en particulier dans tous les problèmes consistant à étudier l'évolution d'un système au cours du temps, que ce soit en physique, en mécanique, en chimie, ou aussi en biologie animale ou végétale, et en économie.

Définition 5.1 Une équation différentielle est une relation entre la variable en général notée x (ou t, lorsque c'est le temps) et une fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées $y' = f'(x), y'' = f''(x), \ldots, y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ qu'on peut mettre sous la forme

$$(E) \qquad \phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

L'entier n est l'ordre de l'équation différentielle (E).

Exemple :

$$\left.\begin{array}{l} yy' - 2x^3 = 0 \\ y'^2 - y = 0 \\ y'^2 - x = 0 \end{array}\right\} \text{ sont des équations différentielles du premier ordre. (les deux dernières sont « incomplètes »)}$$

$y'' + 3y' + 2y = \sin x \iff y'' + 3y' + 2y - \sin x = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

5.1.2 Solutions d'une équation différentielle

Définition 5.2 Une solution de l'équation différentielle $(E) : \phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ est une fonction $y = f(x)$ qui est n fois dérivable sur un intervalle [1] I et qui est telle que l'égalité (E) est vraie pour tout $x \in I$.

[1] Par convention, nous ne considérerons dans ce chapitre que des intervalles non réduits à un singleton

Résoudre une équation différentielle comme (E), c'est trouver toutes ses solutions. (On dit aussi qu'on détermine alors sa *solution générale.*)

Exemple 1 : Considérons l'équation différentielle (E) $y'y^2 - 2x^5 = 0$.
La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x$ donc $f'(x)(f(x))^2 - 2x^5 = 2x(x^2)^2 - 2x^5 = 0$.
En revanche, la fonction $g : x \longmapsto x^3$ n'est pas une solution de cette équation différentielle, car $g'(x) = 3x^2$ et donc $g'(x)(g(x))^2 - 2x^5 = 3x^8 - 2x^5$ n'est pas nul en général (sauf pour $x = 0$ et pour $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, donc jamais sur un vrai intervalle).

Exemple 2 : Considérons l'équation différentielle (E) $2yy' - 2x = 0$
Une fonction dérivable $y = f(x)$ est solution de cette équation sur un intervalle I lorsque pour tout $x \in I$, on a $2f(x)f'(x) = 2x$. En prenant une primitive des deux membres, on en déduit $(f(x))^2 = x^2 + C$, donc $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + C}$. On a donc, pour chaque $C \in \mathbb{R}$, et pour chaque intervalle I dans lequel $x^2 + C > 0$, deux solutions de l'équation. Cette équation admet donc une infinité de solutions.

5.1.3 Conditions initiales

Il n'y a en général pas unicité des solutions d'une équation différentielle. Cependant, sous certaines conditions souvent réunies, et sous réserve d'imposer des *conditions initiales*, une équation différentielle admet une unique solution. (C'est le principe du *déterminisme* : sous réserve qu'on connaisse la situation initiale d'un problème et l'ensemble de ses contraintes sous forme d'équations différentielles, on est censé pouvoir connaître tout le futur d'un système ; en pratique, ceci reste très théorique.)

Définition 5.3 Soit (E) $\phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ une équation différentielle d'ordre n. Une *condition initiale* (c.i.) pour cette équation est la donnée d'un $(n+1)$-uple de réels $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$, et une solution de (1) vérifiant cette condition initiale (ou « associée à cette c.i. ») est une fonction f solution de (E) et telle que $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Dans cette définition, rappelons qu'un n-uple de réels est une suite ordonnée de n réels, qu'on écrit séparés par des virgules et entre parenthèses. En fait, un 2-uple, c'est tout simplement un couple, et un 3-uple est un triplet. En pratique, dans ce cours, on n'étudiera que des équations du premier et du deuxième ordre. Pour une équation différentielle du premier ordre, (donc d'ordre $n = 1$), une condition initiale est donc un $(1+1)$-uple, un couple (x_0, y_0) de réels. Pour une équation différentielle du second ordre, (d'ordre $n = 2$), une condition initiale est un $(2+1)$-uple, c'est-à-dire un triplet (x_0, y_0, y'_0) de réels.
Si $(\mathscr{E})$ est une équation différentielle du second ordre, dire qu'une solution f de $(\mathscr{E})$ est associée à la c.i. $(1, -1, 3)$ signifie que

- d'une part f est solution de $(\mathscr{E})$;

- d'autre part f vérifie $f(1) = -1$ et $f'(1) = 3$

(puisqu'ici $(x_0, y_0, y_0') = (1, -1, 3)$, donc $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ et $f(x_0) = y_0$ se traduit par $f(1) = -1$ et $y_0' = 3$ donc $f'(x_0) = y_0'$ se traduit par $f'(1) = 3$.) Il n'y a pas d'autre condition puisqu'on s'arrête à $f^{(n-1)}$, et qu'ici, pour $n = 2$, c'est $f^{(n-1)} = f^{(1)} = f'$.

Nous admettrons la proposition suivante.

Proposition 5.4 Lorsqu'on peut écrire une équation différentielle (E) d'ordre n sous la forme $y^{(n)} = \psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, ψ étant une fonction « régulière », alors pour toute condition initiale dans le domaine de régularité de ψ, il existe un intervalle ouvert contenant x_0 dans lequel cette équation différentielle admet une unique solution vérifiant cette condition initiale.

La notion de régularité utile ici ne peut pas être définie à notre niveau, mais en pratique, on vérifiera simplement que les conditions initiales sont dans l'ensemble de définition de la fonction ψ.

Exemple 3 : Soit l'équation différentielle du premier ordre $(E) : 3y'y^2 - 2x = 0$. On peut la mettre sous la forme $y' = \dfrac{2x}{3y^2}$, et la fonction du membre de droite est régulière (pour $y \neq 0$). Donc pour toute condition initiale (x_0, y_0) avec $y_0 \neq 0$, on est sûr de l'existence d'un intervalle dans lequel il existe une unique solution.
Les solutions sont les fonctions dérivables f telles que $3f'(x)(f(x))^2 = 2x$ donc en primitivant sur un intervalle : $(f(x))^3 = x^2 + C$ et $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + C}$. Pour l'instant on a la *solution générale* de l'équation différentielle. La constante C dépend de la condition initiale.
Pour une condition initiale admissible, on aura donc $y_0 = f(x_0) = \sqrt[3]{x_0^2 + C}$ donc $C = y_0^3 - x_0^2$.
Si $y_0 = 0$, cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de solution, ni unicité. Simplement on n'en est pas sûr a priori. Par exemple, pour la condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$ la seule solution éventuelle devrait être la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ qui n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, donc aucune solution ne vérifie cette condition initiale.

Nous n'étudierons que des équations différentielles du premier ordre et du second ordre, et nous préciserons à chaque fois l'intervalle sur lequel on cherchera des solutions. Sans précision d'intervalle, c'est que la recherche des solutions se fait sur $\mathbb{R}$.
La recherche des solutions d'une équation différentielle quelconque n'est souvent pas faisable autrement que numériquement (comme la recherche des primitives).
Nous nous contenterons de repérer quelques types d'équations différentielles pour lesquelles on dispose de méthodes permettant d'obtenir les solutions exactes.
Précisément, nous étudierons trois types d'équations différentielles :

- les équations différentielles du premier ordre *à variables séparables* ;
- les équations différentielles du premier ordre *linéaires* ;
- les équations différentielles du second ordre *linéaires à coefficients constants.*

5.2 Équations différentielles du premier ordre à variables séparables

5.2.1 Description

Définition 5.5 Une équation différentielle du premier ordre à variables séparables peut se mettre sous la forme

$$\alpha(y)\,y' = \beta(x)$$

α, β sont deux fonctions.

Remarque : Avec la notation souvent utilisée par les physiciens $y' = \dfrac{dy}{dx}$, formellement, on peut écrire une équation différentielle à variables séparables sous la forme $\alpha(y)\dfrac{dy}{dx} = \beta(x)$ ou encore, formellement, $\alpha(y)\,dy = \beta(x)\,dx$: on s'aperçoit qu'ainsi on a réellement *séparé* les « variables » x et y.

5.2.2 Résolution

Pour résoudre une équation différentielle à variable séparables, (c'est-à-dire pour déterminer sa solution générale) il suffit, après avoir effectivement séparé les deux variables, de primitiver les deux membres de l'égalité. Si A est une primitive de la fonction α et si B est une primitive de la fonction β, les solutions de l'équation à variables séparées $\alpha(y)y' = \beta(x)$ sont les fonctions $y = f(x)$ qui vérifient $A(y) = B(x) + C$, (C est une constante réelle). Si l'on peut inverser la fonction A, on peut donc écrire la solution générale sous la forme $f(x) = A^{-1}(B(x) + C)$.

Nous étudierons cette méthode sur des exemples (on peut remarquer que c'est cette méthode qu'on a appliquée pour résoudre les équations différentielles des exemples 2 et 3.)

Exemple 1 : Reprenons l'équation $y'y^2 - 2x^5 = 0$ (à résoudre sur $\mathbb{R}$). On peut l'écrire sous la forme $y'y^2 = 2x^5$ ou encore $3y^2\,dy = 6x^5\,dx$.

Primitivons les deux membres : on obtient l'égalité $\displaystyle\int 3y^2\,dy = \int 6x^5\,dx$ soit $y^3 = x^6 + C$ et $y = \sqrt[3]{x^6 + C}$.

Pour $C = 0$, on trouve la solution évidente $y = \sqrt[3]{x^6} = x^2$ qui est celle qu'on avait mise en évidence lors de la première étude. Il ne pouvait en être autrement puisque l'expression de la solution générale est censée donner *toutes* les solutions.

5.2.3 Solution particulière vérifiant une condition initiale

Pour déterminer la solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre à variables séparables, vérifiant une condition initiale (x_0, y_0), on peut soit chercher la solution générale puis déterminer la valeur de la constante C en écrivant que $f(x_0) = y_0$, soit aussi intégrer l'équation sous forme séparée à partir de la condition initiale :

La solution de $\alpha(y)y' = \beta(x)$ vérifiant la condition initiale (x_0, y_0) est la fonction $y = f(x)$ telle que $\displaystyle\int_{y_0}^{y} \alpha(u)\,\mathrm{d}u = \int_{x_0}^{x} \beta(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 4 : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' = 4x^3(1+y)$ qui vérifie la condition initiale $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Première méthode, on détermine la solution générale de cette équation différentielle, puis on détermine la constante.
C'est bien une équation à variables séparables, puisqu'on peut l'écrire

$$\frac{y'}{y+1} = 4x^3 \quad \text{ou encore} \quad \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = 4x^3\,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

Ceci n'est valable que si $y \neq -1$. Mais la fonction constante $y : x \longmapsto -1$ est une solution « évidente » de cette équation différentielle. C'est la solution qui correspond à toute condition initiale (x_0, y_0) où $y_0 = 1$. Donc en fait, pour une solution y de E, on a l'équivalence $(\exists x_0 \in \mathbb{R},\ y(x_0) = 1) \iff \forall (x \in \mathbb{R},\ y(x) = 1)$.
Nous cherchons les solutions de E qui ne prennent pas la valeur 1.
On primitive (5.1) et on obtient $\ln|y+1| = x^4 + C$, donc $|y+1| = \mathrm{e}^{x^4+C}$ ou $y+1 = \pm\mathrm{e}^{x^4+C}$, et, en posant $\lambda = \pm\mathrm{e}^C$, on peut écrire la solution générale sous la forme $y = -1 + \lambda\mathrm{e}^{x^4}$ (on retrouve ici la solution correspondant au cas particulier où $y_0 = -1$ étudiée plus haut ; elle correspond à $\lambda = 0$; ce n'est pas vraiment une coïncidence).

Reste à déterminer la constante : on doit avoir $f(1) = 0$ c'est-à-dire $0 = -1 + \lambda\mathrm{e}^1$ donc $\lambda = \mathrm{e}^{-1}$. La solution de l'équation différentielle $y' = 4x^3(y+1)$ vérifiant la condition initiale $(x_0, y_0) = (1, 0)$ est la fonction $f : x \longmapsto -1 + \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{x^4} = \mathrm{e}^{x^4-1} - 1$.
Remarquons qu'on a trouvé une solution définie sur $\mathbb{R}$, ce qui était bien ce qu'on voulait, puisque l'énoncé ne précisait pas d'intervalle de résolution.

Deuxième méthode, directement. On intègre $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+1} = 4x^3\,\mathrm{d}x$ à partir des bornes correspondant à la condition initiale ; cela donne (en tenant compte que nécessairement $y \in]-1, +\infty[$ pour que l'intégrale de gauche ait un sens)

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{u+1} = \int_1^x 4t^3\,\mathrm{d}t \iff \Big[\ln(u+1)\Big]_0^y = \Big[t^4\Big]_1^x \iff \ln(y+1) - 0 = x^4 - 1$$
$$\iff y + 1 = \mathrm{e}^{x^4-1} \iff y = -1 + \mathrm{e}^{x^4-1}$$

On a bien sûr retrouvé la même solution.

5.3 Équations différentielles du premier ordre linéaires

5.3.1 Description

Ce sont des équations différentielles qu'on peut écrire sous la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

a, b, c sont des fonctions (si ce sont des réels, ce sont quand même des fonctions constantes, on dit que l'équation linéaire est à coefficients constants). $c(x)$ est appelé le second membre. Lorsque $c(x)$ n'est pas constamment nul, l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est dite « complète ».
Lorsque $c(x) = 0$, on dit que l'équation différentielle linéaire $a(x)y' + b(x)y = 0$ est « *sans second membre* » (ou encore « homogène », quoique ce terme corresponde aussi à un autre type d'équations différentielles). À toute équation différentielle linéaire (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ correspond une équation différentielle linéaire sans second membre $a(x)y' + b(x)y = 0$; c'est l'équation sans second membre « associée » à l'équation (E).

Exemple 5 : L'équation différentielle du premier ordre (E) $2xy' - y = \sqrt{x}$ (à résoudre sur $]0, +\infty[$) est linéaire. En effet, elle est de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ avec $a(x) = 2x$, $b(x) = -1$ et $c(x) = \sqrt{x}$. Son équation homogène associée est (H) $2xy' - y = 0$. Nous résoudrons cette équation

5.3.2 Principe général de résolution d'une équation différentielle linéaire

Pour résoudre une équation différentielle linéaire (en fait quel que soit son ordre), la méthode générale consiste à commencer par résoudre l'équation sans second membre associée. En effet, on a le résultat :

Théorème 5.6 *La solution générale d'une équation différentielle linéaire est obtenue en ajoutant une solution particulière de l'équation complète à la solution générale de l'équation sans second membre associée.*

La démonstration de ce théorème est assez simple techniquement, la seule difficulté est d'ordre logique, il faut bien comprendre ce qu'il y a à démontrer.

Preuve On considère une équation différentielle linéaire (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et l'équation sans second membre associée (H) : $a(x)y' + b(x)y = 0$.
Soit φ une solution particulière de l'équation (E).
On doit montrer qu'une solution y de (E) s'écrit toujours sous la forme $y = z + \varphi$, avec z solution de (H), et réciproquement que toutes les fonctions sous cette forme $y = z + \varphi$ avec z solution de (H) sont des solutions de (E).

Soit y une solution de (E). Posons $z = y - \varphi$, de sorte qu'on a $y = z + \varphi$. On doit montrer que z est solution de (H). Or, on a φ et y qui sont solutions de (E), donc on a

$\begin{cases} a(x)y' + b(x)y = c(x) \\ a(x)\varphi' + b(x)\varphi = c(x) \end{cases}$; en soustrayant on obtient $a(x)(y-\varphi)' + b(x)(y-\varphi) = 0$ c'est-à-dire $a(x)z' + b(x)z = 0$: z est bien solution de (H).

Réciproquement : Soit z une solution de (H). Si on pose $y = z + \varphi$, en additionnant l'équation (H) que vérifie z et l'équation (E) que vérifie φ, on obtient précisément que y vérifie (E). □

5.3.3 Forme des solutions de l'équation sans second membre

Remarquons d'abord qu'une équation différentielle du premier ordre linéaire sans second membre admet toujours la fonction nulle comme solution particulière.
En fait on a le résultat suivant :

Proposition 5.7 Si f est une solution non nulle, dans un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas, de l'équation (H) $a(x)y' + b(x)y = 0$, alors la solution générale de (H) sur I est $y = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve Puisque f est une solution non nulle, alors f ne s'annule pas sur I. En effet, si f s'annulait pour $x_0 \in I$, f serait la solution de (H) correspondant à la c.i. $(x_0, 0)$; mais la fonction nulle est solution de (H) et elle vérifie aussi cette c.i. ; d'après le principe d'unicité de la solution d'une équation vérifiant une c.i., on aurait $f = 0$, c'est-à-dire que f serait la fonction nulle.
Il est tout d'abord clair que toute fonction y qui s'écrit $y = \lambda f$ est aussi une solution de (H). Il nous faut montrer la réciproque.
Soit y une fonction solution de (H). Comme f ne s'annule pas, on va poser, pour tout $x \in I$, $\lambda(x) = \dfrac{y(x)}{f(x)}$; comme y et f sont des fonctions dérivables, λ est donc une fonction dérivable sur I. On a donc $y(x) = \lambda(x)f(x)$, et $y'(x) = \lambda'(x)f(x) + \lambda(x)f'(x)$. Puisque y est solution de (H), on a donc, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 &\iff a(x)(\lambda'(x)f(x) + \lambda(x)f'(x)) + b(x)\lambda(x)f(x) = 0 \\ &\iff \lambda'(x)a(x)f(x) + \lambda(x)\underbrace{(a(x)f'(x) + b(x)f(x))}_{=0 \text{ car } f \text{ solution de } (H)} = 0 \\ &\iff \lambda'(x) = 0 \quad (\text{puisque } a \text{ et } f \text{ ne s'annulent pas sur } I) \\ &\iff \lambda = C \quad (\lambda \text{ est une fonction constante sur } I) \\ &\iff y(x) = Cf(x) \end{aligned}$$

On a prouvé que $\frac{y}{f}$ est une constante. □

Remarque : La méthode utilisée dans cette démonstration est celle de la *variation de la constante*, que nous réutiliserons au § **5.3.7** p.110. Elle consiste à remplacer la constante λ par une fonction variable $\lambda(x)$...

5.3.4 Résolution de l'équation sans second membre

Première méthode de résolution : Une équation différentielle du premier ordre linéaire sans second membre est aussi une équation différentielle à variables séparables ; il suffit d'écrire (pour $y \neq 0$, on sait que la fonction nulle est solution, on cherche donc les autres fonctions solutions)

$$(H) \qquad a(x)y' + b(x)y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

Donc dans tout intervalle I dans lequel la fonction a ne s'annule pas on est sûr que les solutions de (H) sont, outre la fonction nulle, les fonctions $y = f(x)$ telles que $\ln|y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}\,dx$. Si G est une primitive de la fonction $x \longmapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$, les solutions de (H) sont donc les fonctions qui vérifient $\ln|y| = G(x)+C$ ou encore $|y| = e^{G(x)+C}$, soit $y = \pm e^{G(x)}e^C$ en notant $\lambda = \pm e^C$ qui est un réel non nul et quelconque, on peut conclure que les solutions non nulles de (H) sont les fonctions de la forme [2] $y = f(x) = \lambda e^{G(x)}$. Pour retrouver la solution nulle, il suffit d'autoriser la valeur 0 pour λ : on retrouve alors la forme de la solution générale conformément au résultat de la proposition 5.7.

Deuxième méthode de résolution : C'est cette méthode, plus rigoureuse, qui est conseillée. Elle a le grand avantage de ne pas demander de mettre à part la solution nulle.

On met l'équation (H) sous la forme $y'(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}y(x) = u(x)y(x)$, où on a posé $u(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}$.

u est une fonction continue, qui admet des primitives sur I. Soit U une primitive de u sur I. Il est facile de vérifier que la fonction f définie par $f(x) = e^{U(x)}$ est une solution de (H). En application de la proposition 5.7, la solution générale de (H) est donc :

$y = \lambda e^{U(x)}$, avec $\int -\frac{b(x)}{a(x)}\,dx = U(x) + C$.

En résumé, on a prouvé :

Théorème 5.8 *La solution générale de l'équation différentielle du premier ordre linéaire sans second membre* (H) : $a(x)y' + b(x)y = 0$ *est* $y = \lambda e^{U(x)}$ *avec* $\int -\frac{b(x)}{a(x)}\,dx = U(x) + C$, *c'est-à-dire que* U *est une primitive de la fonction* $x \longmapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$)

En pratique, c'est la deuxième méthode de résolution qui est recommandée : mettre l'équation (H) sous la forme $y' = u(x)y$, primitiver u, choisir une des primitives U, et écrire le résultat : la solution générale de (H) est $y = \lambda e^{U(x)}$.

[2] On rencontre parfois le résultat sous la forme $y = \lambda e^{\int -\frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$. Cette écriture est contestable, car on a vu qu'une intégrale indéfinie n'est pas vraiment une fonction, mais un ensemble de fonctions à une constante près.

Exemple 6 : Résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle

$$(H) \quad (\cos x)y' + (\sin x)y = 0.$$

(H) s'écrit $y' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}y$ (l'intervalle I a été choisi pour que $\cos x$ ne s'annule pas dans l'intervalle de résolution) ; on a $\displaystyle\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x| + C = \ln(\cos x) + C$ (car $\cos x > 0$ sur I). La solution générale de (H) est donc $y = \lambda e^{\ln(\cos x)} = \lambda \cos x$.

Remarque : Dans la recherche des primitives de la fonction $u(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}$, il est logique d'écrire « $+C$ » au bout du résultat : $\displaystyle\int u(x)\,dx = U(x) + C$, mais on prouve ainsi que U est *une* primitive de u, il n'y a donc pas de raison de garder cette constante C dans l'écriture de la solution générale de (H) ; bien sûr, pour chaque C, la fonction $z = e^{U(x)+C}$ est aussi une solution de (H), mais comme elle s'écrit aussi $z = e^C e^{U(x)}$, elle est bien sous la forme générale $y = \lambda e^{U(x)}$, et n'est pas une solution de plus. On évite donc de mettre cette constante C dans la forme générale des solutions de l'équation différentielle (H).

5.3.5 Résolution de l'équation complète

Pour une équation différentielle (E) du premier ordre linéaire, avec un second membre : on résout déjà l'équation sans second membre (H) associée à (E). On trouve la solution générale de (H) sous la forme $y = \lambda g(x)$. Il suffit alors de trouver une solution particulière φ de (E) pour pouvoir conclure que la solution générale de (E) est $y = \varphi + \lambda g(x)$, en application du théorème 5.6 p.106. Le problème est donc de trouver cette solution particulière. Nous allons donner deux méthodes pour cela : soit on devine une solution particulière grâce à son intuition ou grâce à une indication de l'énoncé (§**5.3.6**), soit on applique la méthode de la variation de la constante (§ **5.3.7**).

5.3.6 Recherche d'une solution particulière

Dans un certain nombre de cas, il faut « sentir » l'existence d'une solution particulière et penser à l'exploiter. C'est en particulier souvent le cas lorsque le second membre est une constante, ou une fonction polynôme simple. Dans ce cas, on recherche la solution particulière par identification. Voici deux exemples.

Exemple 7 : Résoudre l'équation (E) $y' + 2y = 3$.
L'équation sans second membre associée, $y' = -2y$ admet comme solution générale $y = \lambda e^{-2x}$, puisque $\int -2\,dx = -2x + C$. D'autre part, si $y = \frac{3}{2}$, il est clair que $y' = 0$ donc la fonction constante $x \longmapsto \frac{3}{2}$ est une solution de (E). Donc la solution générale de l'équation (E) est $y = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}$.

Exemple 8 : Soit l'équation (E) $(\cos x)y' + (\sin x)y = 1$, à résoudre sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a déterminé la solution générale de son équation sans second membre associée (H) $(\cos x)y' + (\sin x)y = 0$ à l'exemple 6 : c'est $y = \lambda \cos x$. Mais si on a un peu de connaissance en trigonométrie, on peut deviner, en pensant à $\cos^2 + \sin^2 = 1$, que la fonction $y = \sin x$ est une solution particulière de (E). La solution générale de (E) est donc $y = \lambda \cos x + \sin x$.

Dans tous les cas où on ne devine pas une solution particulière, on a recours à la méthode de variation de la constante.

5.3.7 Méthode de la variation de la constante

Cette dénomination peut paraître bizarre, mais la description de cette méthode l'explique clairement.

On considère une équation différentielle linéaire (E) $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et son équation homogène associée (H) $a(x)y' + b(x)y = 0$, à résoudre sur un intervalle ouvert I.
Supposons qu'on a résolu (H) et déterminé sa solution générale qui est sous la forme $y = \lambda g(x)$, g étant une fonction qui ne s'annule pas sur I, puisque g est de la forme $g(x) = e^{U(x)}$ (avec $\int -\frac{b(x)}{a(x)}\,dx = U(x) + C$: voir le théorème 5.8 p.108).
La méthode de la variation de la constante consiste à chercher les solutions de (E) sous la forme $y = \lambda(x)g(x)$, c'est-à-dire à remplacer dans l'expression de la solution générale de (H) la constante λ par une fonction $x \longmapsto \lambda(x)$. Remarquons que le fait de chercher les solutions sous cette forme ne nuit en aucune façon à la généralité du problème, car pour toute fonction z, il est possible d'écrire $z = \lambda(x)g(x)$ en posant, pour tout $x \in I$, $\lambda(x) = \frac{z(x)}{g(x)}$, puisque $g(x) \neq 0$ pour $x \in I$.
Une fonction y écrite sous cette forme $y = \lambda(x)g(x)$ est telle que $y' = \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)$; elle est donc solution de (E) lorsque $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ c'est-à-dire lorsque

$$a(x)(\lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)) + b(x)\lambda(x)g(x) = c(x) \iff$$
$$a(x)\lambda'(x)g(x) + \lambda(x)(a(x)g'(x) + b(x)g(x)) = c(x)$$

Mais n'oublions pas que g est solution de (H), donc $a(x)g'(x) + b(x)g(x) = 0$. Ce qui fait que les solutions de (E) sont les fonctions $y = \lambda(x)g(x)$ avec $\lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)g(x)}$ (on peut diviser par $a(x)$ et $g(x)$, car ces fonction ne s'annulent pas sur I). Il suffit alors de primitiver cette égalité, et si F est une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{c(x)}{a(x)g(x)}$ c'est-à-dire si $\int \frac{c(x)}{a(x)g(x)}\,dx = F(x) + C$, les solutions de (E) sont les fonctions $y = (F(x) + C)g(x) = F(x)g(x) + Cg(x)$ qui sont bien sous la forme d'une solution particulière de (E) $(y = F(x)g(x))$ additionnée à la solution générale de (H).

Remarque : Si nous appliquons cette démonstration avec une fonction du second membre nulle (ce qui n'a en aucun cas été exclu dans nos hypothèses), alors on obtient à la fin l'équation $\lambda'(x) = 0$ et λ =constante, ce qui en définitive reprouve le résultat de la proposition 5.7 p.107.

Exemple 5 : Résoudre (E) $2xy' - y = \sqrt{x}$ (sur $I =]0, +\infty[$). On a vu (p.106) que (E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire.

L'équation sans second membre associée est

$$(H) \qquad 2xy' - y = 0 \iff y' = \frac{1}{2x} y\,;$$

$\displaystyle\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln(x) + C = \ln(x^{\frac{1}{2}}) + C$ (on se place sur $\mathbb{R}^{*+}$) donc la solution générale de (H) est $y = \lambda e^{\ln(x^{\frac{1}{2}})} = \lambda\sqrt{x}$.

On cherche les solutions de (E) sous la forme $y = \lambda(x)\sqrt{x} = \lambda(x)g(x)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$. On écrit donc $y' = \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)$ et y est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} 2x(\lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)) - \lambda(x)g(x) = \sqrt{x} &\iff \\ 2x\lambda'(x)\sqrt{x} + \lambda(x)\underbrace{(2xg'(x)) - g(x))}_{=0 \text{ car } g \text{ solution de } (H)} &= \sqrt{x} \\ \iff \lambda'(x) = \frac{1}{2x} &\iff \lambda(x) = \frac{1}{2}\ln x + C. \end{aligned}$$

La solution générale de (E) est donc $y = \left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)\sqrt{x} = \sqrt{x}\ln\sqrt{x} + C\sqrt{x}$.

Il est prudent de vérifier que cette solution générale s'écrit bien sous la forme somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

5.3.8 Conditions initiales

Une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ à résoudre sur un intervalle I dans lequel la fonction a ne s'annule pas peut toujours s'écrire sous la forme $y' = \dfrac{c(x) - b(x)y}{a(x)}$, donc on est sûr de l'existence et de l'unicité d'une solution de (E) vérifiant toute condition initiale (x_0, y_0) avec $x_0 \in I$ donc qui est tel que $a(x_0) \neq 0$. Dans ce cours les équations différentielles du premier ordre linéaires du type de (E) seront toujours associées à des intervalles I tels que $\forall x \in I$, on a $a(x) \neq 0$.

5.4 Équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants

5.4.1 Description

Une équation différentielle du second ordre linéaire est une équation du type

$$(E) \ : \ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x).$$

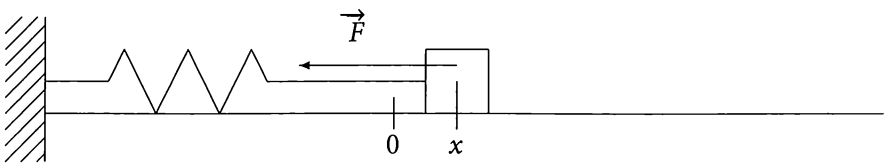
La fonction d est le second membre, et l'équation (H) $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ est son équation sans second membre (ou homogène) associée.
Comme pour les équations du premier ordre, on obtient la solution générale de (E) en additionnant à la solution générale de (H) une solution particulière de (E) (même démonstration que le théorème 5.6).
De plus, pour que ce soit une équation du second ordre, il est nécessaire que a ne soit pas la fonction nulle, et même on se place toujours sur des intervalles où la fonction a ne s'annule pas ; on peut alors écrire (E) sous la forme

$$y'' = \frac{1}{a(x)}(d(x) - b(x)y' - c(x)y)$$

donc en application de la proposition 5.4, pour chaque condition initiale (x_0, y_0, y'_0), il existe une unique solution f de (E) vérifiant cette condition initiale, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.
Mais dans cette situation, il est en général beaucoup plus difficile de trouver les solutions de (H). Nous ne saurons le faire que lorsque les fonctions a, b, c sont constantes, c'est-à-dire lorsque l'équation différentielle (E) est *à coefficients constants.*

5.4.2 Un exemple très général

Exemple 9 : On considère un point mobile de masse M, attaché à un ressort de raideur K, (fournissant une force de rappel proportionnelle à la distance au point d'équilibre). Ce point mobile évolue de façon rectiligne dans un milieu où il y a des frottements induisant une force d'amortissement (de freinage) proportionnelle à la vitesse, la constante de proportionnalité étant B. La position du point est repérée par son abscisse, repérée à partir de la position d'équilibre. On peut modéliser cette situation comme sur cette figure.



La force $\vec{F} = Mx''$ est la résultante de toutes les forces (en fait des deux forces qui comptent, la pesanteur et la résistance du support s'annulant). Il y a la force de rappel du ressort

qui vaut $-Kx$ et la force d'amortissement qui vaut $-Bx'$. On a donc $Mx'' = -Bx' - Kx$ ou encore

$$(E) \qquad Mx'' + Bx' + Kx = 0$$

Ici, la variable est le temps t, x est la fonction inconnue ; les nombres M, B, K sont des constantes *positives*. Si une impulsion est donnée au système par une intervention extérieure sous la forme d'une fonction f du temps, on peut obtenir une équation avec second membre $Mx'' + Bx' + Kx = f(t)$.
Le principe déterministe de la proposition 5.4 permet d'affirmer que l'on connaîtra la position x du point mobile en fonction du temps t pour peu qu'on connaisse la condition initiale, c'est-à-dire à un instant t_0 (en général, on prend $t_0 = 0$, quitte à changer l'origine du temps qu'on fixe au début de l'observation) la position x_0 et la vitesse x'_0. Par exemple, si on lâche sans vitesse initiale le mobile après avoir tiré sur le ressort pour l'amener en face de la graduation x_0, la condition initiale sera $(0, x_0, 0)$.

5.4.3 Forme des solutions de l'équation sans second membre

Il s'agit de résoudre une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants, sans second membre (ou homogène), du type (H) $ay'' + by' + cy = 0$, a, b, c étant des réels et a étant non nul (pour que (H) soit bien du second ordre). On a un théorème analogue à la proposition 5.7 :

Proposition 5.9 Si f_1 et f_2 sont deux solutions non proportionnelles de l'équation (H) $ay'' + by' + cy = 0$, alors la solution générale de (H) est $y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

Preuve Nous démontrerons cette propriété plus loin, lors de l'étude de la méthode de variation des constantes, au §**5.4.9** p.118. □

En fait le résultat de cette proposition est aussi valable si les coefficients a, b, c ne sont pas des constantes mais des fonctions.
Ce résultat est logique en ce sens qu'il affirme que la solution générale d'une équation du second ordre dépend de deux coefficients inconnus (λ_1, λ_2). Lors de la recherche de l'unique solution vérifiant une condition initiale, on détermine ces deux constantes en résolvant un système de deux équations en ces deux inconnues grâce à la double condition initiale de position et de vitesse $y_0 = f(x_0)$ et $y'_0 = f'(x_0)$.

5.4.4 Résolution de l'équation sans second membre

Nous allons nous attacher à trouver deux solutions indépendantes (i.e. non proportionnelles) de l'équation (H) $ay'' + by' + cy = 0$.
Il est bien connu (ou facile à redémontrer) que dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre linéaire homogène à coefficients a et b constants $ay' + by = 0 \iff y' = \alpha y$ (avec $\alpha = -\frac{b}{a}$), la solution générale est $y = \lambda e^{\alpha x}$.

L'idée est donc d'essayer ici aussi de trouver des solutions sous forme exponentielle : $f(x) = e^{rx}$.
Déterminons à quelle condition une fonction exponentielle $f(x) = e^{rx}$ est solution de cette équation (H).
On a $f'(x) = re^{rx}$ et $f''(x) = r^2e^{rx}$ donc $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = (ar^2 + br + c)e^{rx}$.
Donc la fonction exponentielle $f(x) = e^{rx}$ est solution de (H) si et seulement si r est une racine de l'équation (C) $ar^2 + br + c = 0$ appelée équation caractéristique de l'équation (H).
On s'est ramené à la résolution d'une équation numérique du second degré, ce qui est plus facile. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (C).

Si $\underline{\Delta > 0}$, c'est le plus facile : puisque (C) admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, il y a deux fonction exponentielles $f_1(x) = e^{r_1 x}$ et $f_2(x) = e^{r_2 x}$ qui sont solutions de (H). Comme ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles ($\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = e^{(r_1 - r_2)x}$ n'est pas constante), on est sûr que la solution générale de (H) est

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}.$$

Si $\underline{\Delta < 0}$, c'est un peu plus compliqué : l'équation (C) n'a pas de solution réelle, mais elle admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha + i\omega$ (en posant $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$) et $r_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha - i\omega = \overline{r_1}$. Formellement, les fonctions exponentielles complexes $f_1(x) = e^{r_1 x}$ et $f_2(x) = e^{r_2 x}$ sont des solutions, mais ce ne sont pas des fonctions réelles : ce n'est pas facile à manier. L'astuce vient en fait du calcul de $f_1 + f_2$ et $f_1 - f_2$ et des formules d'Euler.
D'après la proposition 5.9, et en tout cas formellement, $f_1 + f_2$ est une solution de (H). Or, $f_1(x) + f_2(x) = e^{(\alpha + i\omega)x} + e^{(\alpha - i\omega)x} = e^{\alpha x}(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x})$. Or, les formules d'Euler nous disent que $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
On a donc $g_1(x) = \dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos\omega x$ et de même $g_2(x) = \dfrac{f_1(x) - f_2(x)}{2i} = e^{\alpha x}\sin\omega x$ qui sont des solutions réelles de (H) (non proportionnelles puisque leur quotient vaut $\tan\omega x$).
La solution générale de (H) est donc $y = \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)$ soit

$$y = e^{\alpha x}(\lambda_1 \cos\omega x + \lambda_2 \sin\omega x).$$

Le cas le plus délicat est le cas $\underline{\Delta = 0}$.

Dans ce cas (C) admet une unique solution (qui est réelle) $r = -\dfrac{b}{2a}$. On dispose donc d'une seule solution de (H) exponentielle qui est $g(x) = e^{rx}$.

On peut alors chercher la solution générale de (H) en appliquant une méthode de variation de la constante : pour une fonction quelconque $y = f(x)$, on l'écrit sous la forme $y = \lambda(x)g(x)$ (il suffit de poser $\lambda(x) = f(x)e^{-rx}$).
On a alors $y' = \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)$ et $y'' = \lambda''(x)g(x) + 2\lambda'(x)g'(x) + \lambda(x)g''(x)$.
Dire que y est solution de (H) se traduit donc par l'équation équivalente

$$(H) \iff$$
$$a(\lambda''(x)g(x) + 2\lambda'(x)g'(x) + \lambda(x)g''(x)) + b(\lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)) + c\lambda(x)g(x) = 0$$
$$\iff \lambda(x)\underbrace{(ag''(x) + bg'(x) + cg(x))}_{=0 \text{ car } g \text{ solution de } (H)} + \lambda'(x)(2ag'(x) + bg(x)) + \lambda''(x)ag(x) = 0$$

Intéressons-nous au coefficient de $\lambda'(x)$.
On a $2ag'(x) + bg(x) = 2are^{rx} + be^{rx} = e^{rx}(2ar + b) = 0$ puisque $r = -\frac{b}{2a}$.
Donc y est solution de (H) si et seulement si $\lambda''(x) = 0$, ce qui équivaut à $\lambda'(x) = \beta$ (constante) et $\lambda(x) = \beta x + \gamma$ (fonction affine). La solution générale de (H) est donc, dans ce cas $y = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{rx}$. On a obtenu dans ce cas les deux solutions particulières de (H) non proportionnelles que sont $g(x) = e^{rx}$ et $g_1(x) = xe^{rx}$, et la solution générale de (H) est

$$y = \lambda_1 e^{rx} + \lambda_2 xe^{rx}.$$

Nous retiendrons

Théorème 5.10 *Soit (H) $ay'' + by' + c = 0$ une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants sans second membre et soit (C) $ar^2 + br + c = 0$ son équation caractéristique, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.*

- *Si $\Delta > 0$, les racines de (C) étant r_1 et r_2, alors la solution générale de (H) est $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$.*
- *Si $\Delta < 0$, une racine complexe de (C) étant $\alpha + i\omega$, alors la solution générale de (H) est $y = e^{\alpha x}(\lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x)$.*
- *Si $\Delta = 0$, la racine double de (C) étant r, alors la solution générale de (H) est $y = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{rx}$.*

Remarque : Dans le cas $\Delta < 0$, on rencontre une autre façon d'écrire la solution générale (souvent utilisée par les physiciens) : « la solution générale de (H) est $y = Ae^{\alpha x}\cos(\omega x - \varphi)$ ». On montre que c'est effectivement équivalent à notre écriture dans un sens en développant $\cos(\omega x - \varphi)$ et dans l'autre sens en posant $A = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ et φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{\lambda_1}{A}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\lambda_2}{A}$ ($Ae^{i\varphi} = \lambda_1 + i\lambda_2$, écriture trigonométrique d'un nombre complexe).

5.4.5 Quelques exemples

Exemple 10 : $(H)\ y''-3y'+2y=0$.
L'équation caractéristique est $(C) : r^2-3r+2=0$ dont les racines (évidentes) sont $r_1=1$ et $r_2=2$ donc la solution générale de (H) est $y=\lambda_1 e^x+\lambda_2 e^{2x}$.

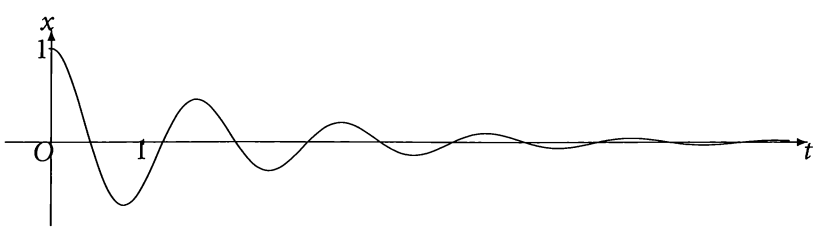
Exemple 11 : $(H)\ y''-2y+5y=0$.
L'équation caractéristique est $(C) : r^2-2r+5=0$, de discriminant $\Delta=-16$, une racine complexe de (C) est $r_1=\dfrac{2+i\sqrt{16}}{2}=1+2i$, donc la solution générale de (H) est $y=(\lambda_1\cos 2x+\lambda_2\sin 2x)e^x$.

Exemple 12 : $(H)\ 4y''-12y'+9y=0$.
L'équation caractéristique est $(C) : 4r^2-12r+9=0$ de discriminant $\Delta=0$, dont la racine double est $r=\frac{3}{2}$. La solution générale de (H) est donc $y=(\lambda_1 x+\lambda_2)e^{\frac{3}{2}x}$.

Exemple 13 : En physique : $(H)\ x''+\omega^2 x=0$.
L'équation caractéristique est $C : r^2+\omega^2=0$. Une racine complexe de C est $i\omega$. La solution générale de (H) est donc $x=\lambda_1\cos\omega t+\lambda_2\sin\omega t=A\cos(\omega t-\varphi)$ (la variable est évidemment le temps t).

Retour sur l'exemple 9 : $(H)\ Mx''+Bx'+Kx=0$ (M,B,K constantes positives) ; voir le contexte physique et la figure au § **5.4.2** p.112. L'équation caractéristique est $Mr^2+Br+K=0$ de discriminant $\Delta=B^2-4MK$. Remarquons que Δ est une fonction croissante de la constante d'amortissement B.

- Si $\Delta>0$ (amortissement fort), il y a deux racines r_1 et r_2 qui sont toutes les deux négatives, donc la solution générale est $x=\lambda_1 e^{r_1 t}+\lambda_2 e^{r_2 t}$ correspond à une fonction qui tend rapidement vers 0 pour $t\to+\infty$ (retour rapide à la position d'équilibre) ;
- si $\Delta=0$, une seule racine négative r, la solution générale est $x=(\lambda_1 t+\lambda_2)e^{rt}$ tend aussi rapidement vers 0 ;
- si $\Delta<0$ (amortissement faible), soit $\alpha+i\omega$ est une des racines complexes de (C), il est certain que $\alpha=-\frac{B}{2M}<0$, donc la solution générale $x=e^{\alpha t}(\lambda_1\cos\omega t+\lambda_2\sin\omega t)$ est le produit d'une fonction trigonométrique par une fonction exponentielle de coefficient négatif : elle converge vers 0 en oscillant autour de la position d'équilibre, c'est un mouvement sinusoïdal amorti.



5.4.6 Résolution de l'équation complète

(c'est-à-dire avec second membre.)
Traduisons sous forme d'un énoncé le principe rappelé au début de cette étude.
Comme pour les équations du premier ordre, on obtient la solution générale de (E) en additionnant à la solution générale de (H) une solution particulière de (E) (même démonstration que le théorème 5.6 p.106).

Théorème 5.11 *Soit (E) $ay'' + by' + cy = d(x)$ une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants (avec un second membre).*
Soit (H) $ay'' + by' + cy = 0$ son équation homogène associée.
La solution générale de (E) s'obtient en additionnant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).

5.4.7 Résolution à l'aide d'une solution particulière

Voici quelques exemples où l'on peut déterminer une solution particulière avec un calcul simple et un tout petit peu d'astuce.

Exemple 14 : Soit (E) $y'' + 3y' - 4y = 8x + 5$. Par expérience, on peut sentir qu'il devrait y avoir une solution fonction affine. Cherchons s'il existe une fonction affine $f(x) = ax + b$ qui est solution de (E). Pour $f(x) = ax + b$, on a $f'(x) = a$ et $f''(x) = 0$ donc

$$f''(x) + 3f'(x) - 4f(x) = 8x + 5 \iff$$
$$3a - 4(ax + b) = 8x + 5 \iff -4ax + (3a - 4b) = 8x + 5$$
$$\iff \begin{cases} -4a = 8 \\ 3a - 4b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{11}{4} \end{cases}$$

L'équation caractéristique (C) $r^2 + 3r - 4 = 0$ de l'équation sans second membre associée (H) $y'' + 3y' - 4y = 0$ admet 1 et -4 comme racines évidentes. Les solutions de (E) sont donc les fonctions du type $y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-4x} - 2x - \frac{11}{4}$.

Exemple 15 : Soit (E) $y'' + 2y' + y = e^x$. Puisque la fonction exponentielle est égale à toutes ses dérivées on peut « voir » que $f(x) = \dfrac{e^x}{4}$ est une solution particulière. Comme l'équation homogène associée (H) $y'' + 2y' + y = 0$ a comme équation caractéristique (C) $r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0$ qui admet -1 comme racine double, on peut dire que la solution générale de (E) est $y = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{-x} + \dfrac{e^x}{4}$

Exemple 16 : Soit (E) $y'' + 4y' + 5y = \sin x$. On cherchera une solution particulière sous la forme $a\cos x + b\sin x$ (indication de l'énoncé).
On pose $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

On a alors $f'(x) = -a\sin x + b\cos x$ et $f''(x) = -a\cos x - b\sin x$. f est solution de (E) lorsque

$$(-a\cos x - b\sin x) + 4(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) = \sin x \iff$$
$$(-a + 4b + 5a)\cos x + (-b - 4a + 5b)\sin x = \sin x$$
$$\iff \begin{cases} 4a + 4b = 0 \\ -4a + 4b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Une solution particulière de l'équation (E) est donc $f(x) = -\frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$.
L'équation homogène associée admet (C) $r^2 + 4r + 5 = 0$ comme équation caractéristique, de discriminant $\Delta = -4$, dont une racine est $-2 + \mathrm{i}$, donc la solution générale de l'équation homogène est $y = \mathrm{e}^{-2x}(\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)$ et la solution générale de (E) est

$$y = \mathrm{e}^{-2x}(\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x) - \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x.$$

5.4.8 Indications générales pour trouver une solution particulière

Nous admettrons le résultat suivant :

Proposition 5.12 Soit (E) l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$. Soit (H) : $ay'' + by' + cy = 0$ son équation sans second membre associée, et soit (C) : $ar^2 + br + c = 0$ son équation caractéristique.

- Si $d(x)$ est un polynôme de degré p, alors (E) admet une solution particulière
  - de même degré p si 0 n'est pas racine de (C),
  - de degré $p + 1$ si 0 est racine simple de (C),
  - de degré $p + 2$ si 0 est racine double de (C).
- Si $d(x)$ est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ ($P(x)$ étant un polynôme de degré p), alors (E) admet une solution particulière de la forme $Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, $Q(x)$ étant un polynôme
  - de même degré p si λ n'est pas racine de (C),
  - de degré $p + 1$ si λ est racine simple de (C),
  - de degré $p + 2$ si λ est racine double de (C).
- Si $d(x)$ est de la forme $\lambda\cos ux + \mu\sin ux$, alors (E) admet une solution particulière de la forme $A\cos ux + B\sin ux$, sauf si $\mathrm{i}u$ est racine de (C), dans ce cas, une solution particulière est de la forme $x(A\cos ux + B\sin ux)$

5.4.9 Méthode de variation des constantes

Lorsqu'on n'a pas d'indication pour déterminer une solution particulière, on peut ici aussi faire varier les constantes.
Soit (E) $ay'' + by' + cy = d(x)$ et (H) $ay'' + by' + cy = 0$. On suppose que la solution générale de (H) est $y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. f_1 et f_2 sont deux solutions particulières, non proportionnelles de (H).
On cherche alors la solution générale de (E) sous la forme

$y = f(x) = \lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2(x)f_2(x)$ avec $y' = f'(x) = \lambda_1(x)f_1'(x) + \lambda_2(x)f_2'(x)$.
Il est logique d'imposer deux contraintes pour déterminer les deux fonctions λ_1 et λ_2. Pour chaque x, $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ peuvent se déterminer à partir de $f(x)$ et $f'(x)$ en résolvant le système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2(x)f_2(x) = f(x) \\ \lambda_1(x)f_1'(x) + \lambda_2(x)f_2'(x) = f'(x). \end{cases}$$

On peut montrer que les fonctions λ_1, λ_2 ainsi déterminées sont dérivables. D'autre part, puisqu'en dérivant $f(x)$ on devrait trouver
$f'(x) = \lambda_1(x)f_1'(x) + \lambda_1'(x)f_1(x) + \lambda_2'(x)f_2'(x) + \lambda_2(x)f_2(x)$ alors qu'on a
$f'(x) = \lambda_1(x)f_1'(x) + \lambda_2(x)f_2'(x)$, c'est forcément qu'on a

$$\lambda_1'(x)f_1(x) + \lambda_2'(x)f_2(x) = 0. \tag{5.2}$$

On a alors $y'' = f''(x) = \lambda_1'(x)f_1'(x) + \lambda_1(x)f_1''(x) + \lambda_2'(x)f_2'(x) + \lambda_2(x)f_2''(x)$, donc f vérifie (E) lorsque

$$\begin{aligned} a(\lambda_1'(x)f_1'(x) + \lambda_1(x)f_1''(x) + \lambda_2'(x)f_2'(x) + \lambda_2(x)f_2''(x)) + \\ b(\lambda_1(x)f_1'(x) + \lambda_2(x)f_2'(x)) + c(\lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2(x)f_2(x)) = d(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \lambda_1(x)(af_1''(x) + bf_1'(x) + cf_1(x)) + \lambda_2(x)(af_2''(x) + bf_2'(x) + cf_2(x)) + \\ a\lambda_1'(x)f_1'(x) + a\lambda_2'(x)f_2'(x) = d(x) \end{aligned}$$

$$\iff a\lambda_1'(x)f_1'(x) + a\lambda_2'(x)f_2'(x) = d(x) \quad \text{puisque } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont solutions de } (H).$$

En combinant avec (5.2), on obtient λ_1' et λ_2' comme solutions du système
$\begin{cases} \lambda_1'(x)f_1(x) + \lambda_2'(x)f_2(x) = 0 \\ \lambda_1'(x)f_1'(x) + \lambda_2'(x)f_2'(x) = \frac{d(x)}{a} \end{cases}$
On détermine alors λ_1 et λ_2 en primitivant ce qu'on vient de trouver. Il est intéressant de noter que cette primitivation fait apparaître des constantes qui correspondent à la solution générale de (H).

Exemple 17 : Résoudre sur l'intervalle $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

L'équation homogène associée (H) $y'' + y = 0$ a pour solution générale

$$y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x$$

(c'est presque évident, puisque i est racine de l'équation caractéristique).

On cherche les solutions de (E) sous la forme $y = f(x) = \lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ (avec $f_1 = \cos$ et $f_2 = \sin$. On impose que $y' = f'(x) = \lambda_1(x)f_1'(x) + \lambda_2(x)f_2'(x)$, donc que $\lambda_1'(x)\cos x + \lambda_2'(x)\sin x = 0$.
On a alors $y'' = f''(x) = \lambda_1'(x)f_1'(x) + \lambda_1(x)f_1''(x) + \lambda_2'(x)f_2'(x) + \lambda_2(x)f_2''(x)$.
Donc f sous cette forme est solution de (E) lorsque

$$\lambda_1'(x)f_1'(x) + \lambda_1(x)f_1''(x) + \lambda_2'(x)f_2'(x) + \lambda_2(x)f_2''(x) + \lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

En utilisant que f_1 et f_2 sont solutions de (H), il ne reste plus que

$$\lambda_1'(x)f_1'(x) + \lambda_2'(x)f_2'(x) = \frac{1}{\sin x} \iff \lambda_1'(x)(-\sin x) + \lambda_2'(x)\cos x = \frac{1}{\sin x} \text{ d'où le système :}$$

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)\cos x + \lambda_2'(x)\sin x = 0 \\ -\lambda_1'(x)\sin x + \lambda_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

On multiplie la première égalité par $\cos x$ et la deuxième par $(-\sin x)$ avant d'additionner pour trouver $\lambda_1'(x) = -1$ donc $\lambda_1 = -x + C_1$.
On multiplie la première égalité par $\sin x$ et la deuxième par $\cos x$ avant d'additionner pour trouver $\lambda_2'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ et donc $\lambda_2(x) = \ln(\sin x) + C_2$ (puisque $\sin x > 0$ pour $x \in I$).
La solution générale de (E) est donc $y = (-x + C_1)\cos x + (\ln(\sin x) + C_2)\sin x$.
On peut écrire ce résultat sous la forme :

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + (-x\cos x + (\sin x)\ln(\sin x)),$$

pour mettre en évidence la somme d'une solution générale de (H) et d'une solution particulière de (E).
Une solution particulière de (E) est $f(x) = -x\cos x + (\sin x)\ln(\sin x)$ et c'est vrai qu'on ne pouvait guère le deviner.

5.5 Exercices

Exercice 5.1. On considère l'équation différentielle linéaire :

$$y' - 4y = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3.$$

1. Montrer qu'il existe un polynôme solution de cette équation.
2. Préciser quelle est l'équation sans second membre associée. La résoudre.
3. En déduire les solutions de l'équation.
4. Trouver la solution y de l'équation telle que $y(0) = -2$.

Exercice 5.2. On considère l'équation différentielle linéaire : $y' - \frac{3}{x}y = x$, à étudier sur $]0,+\infty[$.

1. En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver les solutions de cette équation.
2. Trouver la solution y de l'équation telle que $y(1) = 3$.

Exercice 5.3. Résoudre les équations différentielles suivantes, sur l'intervalle I qui est précisé à chaque fois :

1. $y' - \left(\frac{2}{x^2}\right)y = 0$; $I =]0,+\infty[$.
2. $y' = \frac{y-2}{x-1}$; a) $I =]-\infty,1[$; b) $I =]1,+\infty[$.
3. $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$; $I =]0,+\infty[$.
4. $y' - \frac{y}{x^2-1} = 1$; a) $I =]-1,1[$; b) $I =]1,+\infty[$; c) $I =]-\infty,-1[$.
5. $(x-1)y' + y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $I =]-1,1[$.
6. $xy' - y = \ln|x+1|$; a) $I =]-1,0[$; b) $I =]0,+\infty[$; c) $I =]-\infty,-1[$.
7. $2x + yy' = 0$; intervalle I à préciser.
8. $(1-x^2)y' + y = 1$; a) $I =]-1,1[$; b) $I =]1,+\infty[$; c) $I =]-\infty,-1[$.
9. $xy' + y = x$; a) $I =]0,+\infty[$; b) $I =]-\infty,0[$.
10. $(\cos x)\,y' - (\sin x)\,y = \cos(2x)$; $I =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 5.4.
Résoudre les équation différentielles suivantes, qui sont « à variables séparables ». On essaiera de préciser à chaque fois sur quels intervalles sont définies les solutions trouvées.

1. $y' = xy^2$;
2. $\sqrt{1-x^2}y' - \sqrt{1-y^2} = 0$;
3. $(1+x^2)y' + 2x + 2xy^2 = 0$;
4. $(1-x^2)y' - xy^2 - xy - x = 0$;
5. $y' = \frac{1-y}{1-2x}$;
6. $(1+y)y' = 4x^3$;
7. $(4-x^2)yy' = 2(1+y^2)$.

Exercice 5.5. Résoudre l'équation différentielle du premier ordre : $y^2 + y'^2 = 1$.

Exercice 5.6. On considère l'équation différentielle (de Bernoulli) :

$$(\mathrm{E}) y' + 2xy = 2xy^3.$$

Soit $x \longmapsto y(x)$ une solution. On considère la fonction z définie par $z(x) = \dfrac{1}{y(x)^2}$.

1. Montrer que $z'(x) = \dfrac{-2y'(x)}{y(x)^3}$.
2. Former une équation différentielle (E') vérifiée par z.
3. Résoudre (E') puis (E). On précisera sur quel(s) intervalle(s) sont définies les solutions trouvées.

Exercice 5.7. Pour chacune des équations différentielles du second ordre suivantes :

a) Donner la solution générale.

b) Trouver la solution particulière qui vérifie $y(0) = y'(0) = 1$.

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$;
2. $y'' + 2y' + y = 0$;
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$;
4. $y'' - 6y' + 13y = 0$;
5. $y'' - y' + y = 0$;
6. $12y'' - 60y' + 75y = 0$;
7. $20y'' + 9y' + y = 0$;
8. $3y'' - 5y' - 2y = 0$;
9. $y'' - 8y' + 17y = 0$.

Exercice 5.8. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-3x}$;
2. $y'' + 2y' + y = x + 4$;
3. $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$;
4. $y'' + 2y' + 2y = 5\sin(x)$;
5. $y'' + y = x^2 - 1$;
6. $2y'' + y' - y = 3\cos 2x - \sin 2x$;
7. $y'' - 4y = 13\cos 3x$;
8. $y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}$.

Exercice 5.9.

1. Trouver la solution de l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = 6\mathrm{e}^{-x}$, qui vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.
2. Trouver la solution de l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 5\cos(t) + 2$, telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$, puis celle vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5.10. Trouver les solutions des équations différentielles :

1. $y'' + y = \cos(t)$;
2. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x + e^{2x}$;
3. $y'' + 2y' - 8y = 4e^{2x}(3x+5)$;
4. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos(2x) + 25\sin(2x)$.

Exercice 5.11. En utilisant la méthode de la variation des constantes trouver les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' - y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Exercice 5.12.
On considère l'équation différentielle (équation d'Euler) :

$$\text{(E)} \qquad x^2y'' + xy' + y = 0; \quad (x > 0)$$

On introduit une nouvelle variable u en posant $u = \ln(x)$ (pour $x > 0$). On suppose que y est une solution de (E). Soit z la fonction de la variable u, définie par $z(u) = z(\ln(x)) = y(x) = y(e^u)$.

1. Montrer les relations : $y'(x) = z'(\ln x)\frac{1}{x}$ et $y''(x) = z''(\ln x)\frac{1}{x^2} - z'(\ln x)\frac{1}{x^2}$.
2. Former une équation différentielle (E′) vérifiée par z.
3. Résoudre (E′) puis (E).

Exercice 5.13. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}.$$

Indications pour la résolution des exercices

Chapitre 1

Indications pour les exercices sur les limites, la continuité et la dérivation

Exercice 1.1. Les méthodes sont tellement diverses dans cet exercice que nous ne donnerons pas d'indication particulière pour chaque limite. Voir le corrigé si on n'y est pas arrivé. Pour bien rédiger un calcul de limite, éviter de commencer par la fin, c'est-à-dire par écrire $\lim_{x\to\dots} \cdots$ alors qu'on ne sait encore même pas si cette limite existe. Il vaut mieux commencer par nommer l'expression dont on veut calculer la limite, puis la transformer jusqu'à obtenir une expression pour laquelle la limite cherchée est « évidente ».

Exercice 1.2.

1. Commencer par faire la représentation graphique de la fonction E, en regardant ce qui se passe autour des nombres entiers : les propriétés de continuité et de limite sont faciles à lire sur une figure bien faite, il n'y a plus, ensuite qu'à prouver ce qu'on a vu sur le dessin.
2. La périodicité est essentielle pour la représentation graphique, les autres propriétés sont ensuite faciles à lire sur la figure, comme pour la question précédente ; là où la fonction E est continue, la fonction f l'est aussi forcément.
3. Il est conseillé d'exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$, ce qui permet d'établir périodicité et la continuité de g pour presque tous les points. Attention, la non continuité de f en un certain x_0 n'implique pas la non continuité de g en x_0, c'est justement un des intérêts de cet exercice.

Exercice 1.3. Attention ! La fonction valeur absolue ($x \longmapsto |x|$) si elle est *continue* sur $\mathbb{R}$, n'est pas *dérivable* en 0, donc une fonction comme f, définie avec une valeur absolue risque de ne pas être dérivable partout. Attention aussi, il n'est pas question de « dériver à travers la valeur absolue » : **ce serait une grosse erreur** d'écrire quelque chose comme « puisque $f(x) = |x^2 - 1| = |g(x)|$, on a $f'(x) = |2x| = |g'(x)|$ », ceci est **faux** ! On ne dérive

pas telle quelle une fonction définie avec des valeurs absolues, on commence par ôter les valeurs absolues à l'aide d'une étude de cas, puis seulement ensuite on peut dériver.

Exercice 1.4. On demande de montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, on ne demande pas de démontrer que l'ensemble de dérivabilité de f est cet intervalle. L'ensemble de dérivabilité est l'ensemble de définition de f pour une raison toute simple. La dérivée de f se calcule avec la formule de dérivation d'un quotient, comme on sait le faire depuis la première.

Exercice 1.5. Les deux questions de cet exercice sont en fait totalement indépendantes, et peuvent être traitées dans l'ordre qu'on veut. Mais il y a dans tous les cas une question implicite qui est la détermination de l'ensemble de définition de f. On doit donc chercher quand la quantité sous le radical est positive, et le signe de cette quantité dépend de la parité de n, il faudra donc faire une étude de cas (n pair puis n impair).

Exercice 1.6. Appliquer tout simplement les formules de dérivation.

Exercice 1.7. C'est un exercice compliqué, et il vaut mieux suivre les recommandations suivantes :

1. Calculer $f'(x)$, et mettre le résultat sous la forme $f'(x) = C(1-x)^{\alpha}$; c'est sous cette forme qu'on essaiera de calculer $f''(x)$, puis après avoir mis le résultat sous cette même forme, on pourra itérer, et deviner une formule pour $f^{(k)}(x)$ valable pour tout $k \in \mathbb{N}$; il ne reste plus alors qu'à démontrer cette formule par récurrence.
2. Utiliser la formule de Leibnitz.
3. On pourra remarquer que $f'(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$...et deviner une formule générale sous cette forme (avant de démontrer cette formule par récurrence).
4. La formule de Leibnitz n'est pas la plus simple à utiliser ; il vaut mieux dériver f en considérant que $f(x) = \mathrm{Im}\,(e^x(\cos x + i \sin x)) = \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$ et dériver f sous cette forme.

Exercice 1.8. 1. est totalement évident et 2. n'est pas beaucoup plus dur en se rappelant de la formule (vue en première) donnant la somme des termes d'une suite géométrique (on peut aussi simplement montrer la formule demandée par récurrence). Enfin la dernière question est une simple application de ce qui précède.

Exercice 1.9. Aucune difficulté particulière.

Exercice 1.10. Il ne s'agit pas de calculer le d.l., mais de redémontrer son existence à partir de la formule proposée, en utilisant la définition du d.l.

Exercice 1.11. Pour les deux premiers calculs, on peut utiliser la formule de Taylor-Young, mais à partir du troisième calcul, il vaut beaucoup mieux utiliser les règles de calculs sur les d.l.

Exercice 1.12. Pour 1. et 2., on peut au choix, utiliser la formule de Taylor-Young ou les d.l. classiques de la fonction exponentielle et de cosinus. Pour 3., c'est les règles de calcul sur les d.l. qui sont les plus performantes. Attention, pour ce dernier calcul, à ne pas écrire $\sqrt{3+x} = \sqrt{1+(2+x)} = \sqrt{1+u}$, car $u = 2+x$ ne tend pas vers 0 lorsque $x \to 0$, et on ne peut donc pas appliquer la formule de composition des d.l.

Exercice 1.13. Ici encore, il suffit d'appliquer les différentes règles de calcul de développements limités.

Exercice 1.14. On pose $h = \frac{1}{x}$, puis à la fin on revient à la variable x.

Exercice 1.15. Inutile d'utiliser des d.l. d'ordre trop élevé. En général, le degré du dénominateur donne une indication de l'ordre du d.l. à utiliser.

Exercice 1.16. Appliquer le plan d'étude d'une fonction (voir chapitre 2) ; pour l'étude des branches infinies, on procédera comme au § **1.3.6**, p.30.

CHAPITRE 2

Indications pour les exercices sur les études de fonctions

Exercice 2.1. Rien de bien particulier, si ce n'est la présence d'une asymptote oblique en plus de l'asymptote verticale.

Exercice 2.2. Ici aussi, il y a une asymptote oblique (et bien sûr une asymptote verticale).

Exercice 2.3. Attention à la présence d'une demi-tangente verticale au point d'arrêt.

Exercice 2.4. Dans la question 3., on demande le calcul de f'', car on ne peut pas déterminer le signe de la dérivée algébriquement.
En ce qui concerne les branches infinies (question 2.), il y a d'un côté une asymptote oblique et de l'autre une branche parabolique.

Exercice 2.5. Les variations sont un peu compliquées par le fait qu'il y a une valeur où la dérivée s'annule sans changer de signe. Du coup la courbe présente un point d'inflexion, avec tangente horizontale. Il y a deux asymptotes verticales et une asymptote oblique

Exercice 2.6. Il faudra étudier les branches infinies (on trouvera deux asymptotes obliques différentes en $+\infty$ et en $-\infty$), et les deux points d'arrêt (on trouvera des demi-tangentes verticales tournées vers le haut).

Exercice 2.7. Attention à l'ensemble de définition. Le signe de la dérivée se détermine en posant $e^x = X$, pour se ramener au signe d'un trinôme en X. Il y a une asymptote verticale et une asymptote oblique.

Exercice 2.8. Le signe de la dérivée dépend du signe de $g(x)$, fonction que l'on étudiera. On montrera que $g(x)$ s'annule pour une seule valeur α dont on déterminera une valeur approchée par tâtonnement. Il y a une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

Exercice 2.9. La principale difficulté est l'étude au voisinage de 0, mais elle est détaillée dans les deux premières questions. On a intérêt à penser à utiliser la parité de f. Il y a une asymptote horizontale.

Exercice 2.10. Il n'est pas demandé de représenter la fonction f ; ce serait d'ailleurs bien difficile.

Exercice 2.11. Attention à l'ensemble de définition. Attention aussi à ne pas écrire de racines carrées de nombres négatifs (ou pouvant être négatifs) : la formule $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ n'est pas valable pour $a < 0$ et $b < 0$. Pour étudier les branches infinies, penser aux développements asymptotiques. Il y a deux asymptotes obliques différentes en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2.12. Encore une étude de fonction qui nécessite l'introduction d'une fonction auxiliaire. Il suffit de se laisser guider par l'énoncé. Il y a une asymptote horizontale, une asymptote verticale, mais aussi une demi-tangente verticale à un point d'arrêt.

Exercice 2.13. Ne pas oublier que la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$. Il y a une asymptote oblique, et deux points où on trouve des demi-tangentes verticales.

Exercice 2.14. Une étude très difficile, et vous pouvez légitimement vous aider du corrigé pour la faire.

CHAPITRE 3

Indications pour les exercices sur les nouvelles fonctions de référence

Exercice 3.1. Pour 1., on trouve dans le cours, dans les remarques qui suivent l'introduction de arcsin et de arctan, tout ce qu'il faut pour trouver ce que valent $\arcsin(-x)$ et $\arctan(-x)$. Pour arccos, on se ramène à arcsin en utilisant la formule liant arcsin et arccos, p.61.
Pour 2., tout est dans le cours.
Pour 3., on cherche à utiliser les résultat du 1., en utilisant les formules qui lient sin, cos et tan : on a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$; pour les $x < 0$, on utilise la parité.

Exercice 3.2. f est impaire, et sa dérivée est nulle, ce qui permet toutes les conclusions demandées. Attention, le fait que la dérivée soit nulle sur $\mathbb{R}*$ n'implique pas qu'elle est constante sur $\mathbb{R}^*$, mais seulement sur les intervalles inclus dans $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3.3. À chaque fois, il faut bien penser à la parité et à la périodicité des fonctions. Pour les trois premières fonctions, il y a un intervalle sur lequel on a $f_i(x) = x$, ça suffit presque pour f_1 et f_3, mais pour f_2, malgré son caractère impair, on doit étudier $f_2(x)$ pour x par exemple dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, en se ramenant à l'intervalle de base avec une transformation comme $u = x - \pi$ ou $u = \pi - x$.
Pour 4. et 5., le plus simple est de se servir de la formule liant arcsin et arccos, voir la remarque p.61.

Exercice 3.4. Pour 1., bien déterminer l'ensemble de définition et utiliser la formule donnant $\tan 2\alpha$.
Pour 2., on a besoin de la formule liant $\cos^2 x$ à $\tan^2 x$ (voir la dérivée de la fonction tangente), et aussi d'exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ (il suffit d'écrire $\cos 4x = \cos(2(2x))$ et d'appliquer deux fois la formule donnant $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$).

Exercice 3.5. Après avoir déterminé l'ensemble de définition de l'expression à simplifier, le plus simple est de dériver cette expression, de simplifier le résultat et de reconnaître une dérivée « classique ».
On peut aussi utiliser une méthode purement trigonométrique, en posant $x = \cos 2\theta$, mais c'est un peu plus délicat.

Exercice 3.6. Pour l'ensemble de définition comme pour l'ensemble de dérivation, on est amené à résoudre une double inéquation du type $-1 \leqslant u(x) \leqslant 1$ (resp. $-1 < u(x) < 1$) ; le plus simple pour traiter un tel problème est de l'interpréter comme $|u(x)| \leqslant 1$ (ou $<$) et d'élever au carré pour faire disparaître la valeur absolue.

Attention pour simplifier la dérivée, il faut se rappeler que $\sqrt{X^2} = |X| = \pm X$ selon le signe de X, et ça ne vaut pas toujours X.

Exercice 3.7. Les indications de l'exercice précédent sont encore pleinement valables ici.

Exercice 3.8. Pour se simplifier la tâche, ça vaut le coup de penser à la parité.
Il y a une asymptote oblique, qui n'est pas la droite $y = x$. Bien utiliser l'indication de l'énoncé.

Exercice 3.9. Il faut bien réussir à simplifier l'expression de la dérivée, en utilisant que $1 + a^2 + x^2 + a^2x^2 = (1 + a^2) + x^2(1 + a^2)\ldots$ ce qui permet de factoriser.

Exercice 3.10. Application directe de la formule de l'exercice précédent. Bien penser à identifier ce qui joue le rôle de x et de a, en pensant que la formule principale n'est valable que pour $x < \frac{1}{a}$.

Exercice 3.11. Toutes ces formules se démontrent simplement en appliquant les formules de définition de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

Exercice 3.12. La façon de raisonner la plus simple consiste à appeler $f(x)$ un des membres de l'égalité à démontrer, $g(x)$ l'autre membre, à calculer $f'(x)$ et $g'(x)$, on trouve la même valeur, on a donc montré que $f(x) = g(x) + C$. On détermine ensuite la valeur de C en appliquant ces formules pour une valeur particulière.

Exercice 3.13. On a déjà commencé cette étude à la première question de l'exercice précédent. Bien penser à utiliser les résultats déjà établis (ensemble de définition, dérivée...).

CHAPITRE 4

Indications pour les exercices sur le calcul intégral

Exercice 4.1. Ce sont des situations où il suffit de lire à l'envers les classiques formules de dérivation pour trouver une primitive des fonctions concernées.

Exercice 4.2. Normalement, pour intégrer un polynôme trigonométrique, la méthode universelle consiste à linéariser. C'est effectivement ce qu'il faut faire dans les deux premiers cas, mais pour le 3. il suffit de factoriser sin et de remplacer $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$.

Exercice 4.3. Pour les 5 premiers calculs, les éléments simples sont de première espèce et de degré -1 (donc les primitives sont des logarithmes). Attention aux parties entières lorsque le degré total est $\geqslant 0$.

Pour le 6., il y a un élément simple de deuxième espèce (très simple).
Dans le 7., il y a un élément simple de première espèce de degré –2.

Exercice 4.4. Il y a, dans cet exercice, toujours des éléments simples de seconde espèce. Il faut procéder comme décrit dans le cours au § **4.4.4**, p.91. Ne pas hésiter à utiliser les résultats de la question précédente dans certains cas (1. sert pour le 2., par exemple).

Exercice 4.5. Voici des changements de variables adéquats.
1. $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; 2. $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; 3. $u = \sin(x)$) ; 4. $u = \cos(x)$; 5. $u = e^x$; 6. $u = e^x$.
Bien penser à revenir à la variable initiale x quand on a finit d'intégrer avec la variable « changée ».

Exercice 4.6. Bien que la fonction valeur absolue ne soit pas dérivable en 0, elle est continue, donc intégrable et admet donc des primitives définies sur $\mathbb{R}$, dont une unique prenant une valeur donnée pour un x_0 fixé.
Pour la déterminer, on raisonne sur chaque intervalle $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$, on détermine une première constante dans l'intervalle qui contient x_0, puis on détermine la deuxième constante en utilisant le raccord en 0.

Exercice 4.7. Une seule intégration par parties suffit, sauf pour le 6. et le 8. où il faut en faire trois successivement.
Au 5. et au 9., il faut faire une décomposition en éléments simples après l'intégration par parties (celle du 9. est franchement compliquée).
Pour terminer le 7., il faut faire le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

Exercice 4.8. Voici des changements de variables adéquats.
1. $u = e^t$; 2. $x = 2 + \sin(t)$; 3. $u = \sin(x)$) ou $u = \cos x$ (au choix).

Exercice 4.9. En calculant $I(x) - J(x)$, on se ramène à la primitive d'une expression du type $\frac{u'}{u}\ldots$

Exercice 4.10. Poser $u = t$ et $v' = \frac{t}{1+t^2}\ldots$ Ensuite, il suffit d'écrire $\frac{1}{(t^2+1)^2} = \frac{(1+t^2)-t^2}{(t^2+1)^2}\ldots$

Exercice 4.11. 1. : mettre la quantité sous le radical sous forme canonique, puis faire le changement de variable $x = 1 + 3\sin t$.
2. : le changement de variable $u = e^x$ s'impose, puis il faut poser $v = \sqrt{u-1}\ldots$
3., 4. : le changement de variable $u = \sqrt{x}$ semble bien logique !
5. : c'est le changement de variable $u = \sqrt{1+\sin x}$ qui fonctionne, puis $v = u^2$ et enfin $w = \sqrt{2-v}$.

Exercice 4.12. Penser à appliquer la formule $\tan(a-b)$ au bon moment.

CHAPITRE 5

Indications pour les exercices sur les équations différentielles

Exercice 5.1. Aucune difficulté.

Exercice 5.2. Ne pas oublier que $3\ln|x| = \ln|x^3|$ pour faire disparaître le logarithme dans l'exponentielle (ensuite on « rentre » la valeur absolue dans la constante.)

Exercice 5.3. Toujours commencer par bien identifier le type de l'équation différentielle rencontrée (linéaire ou à variables séparables, et quand elle est linéaire, avec ou sans second membre).
En présence d'une équation différentielle du premier ordre linéaire avec second membre, une fois résolue l'équation homogène associée, bien se poser la question de l'existence d'une solution « évidente » avant de se lancer dans la méthode de variation de la constante ; mais c'est parfois la seule méthode possible.

Exercice 5.4. On n'a que quelques calculs de primitives à faire, en appliquant la méthode du cours. Le seul exercice vraiment compliqué est le 4., où on doit primitiver $\dfrac{1}{y^2+y+1}$. Il faut appliquer scrupuleusement la méthode décrite au § **4.4.4**, p.91.

Exercice 5.5. Il faut exprimer y' en fonction des autres termes (deux cas possibles) pour pouvoir se ramener à une équation à variables séparables.
Le résultat est franchement très compliqué, malgré la présence de quelques solutions évidentes.

Exercice 5.6. Le changement de fonction inconnue proposé fonctionne assez simplement, on se ramène à une équation différentielle linéaire assez simple. Il faut ensuite revenir à la fonction y, et ça, c'est un peu plus compliqué.

Exercice 5.7. Pour les a), il s'agit simplement d'une application directe du cours ; pour les b), il suffit de dériver la solution générale obtenue et de résoudre un système de deux équations à deux inconnues en général très très simple.

Exercice 5.8. Forme de la solution particulière à rechercher :
1. : λe^{-3x} ; 2. : $\lambda x+\mu$; 3. : $\lambda x e^{-2x}$; 4. : $\lambda\cos x+\mu\sin x$; 5. : $\alpha x^2+\beta x+\gamma$;
6. : $\lambda\cos 2x+\mu\sin 2x$; 7. : $\lambda\cos 3x+\mu\sin 3x$ encore qu'il y a en fait une solution « évidente » ;
8. : $\lambda x^2 e^{3x}$.

Exercice 5.9. Pour le 1., c'est comme à l'exercice précédent, et on cherche bien sûr une solution particulière de (E) sous la forme $y = \lambda x e^{-x}$. Pour trouver la solution de (E) qui vérifie la condition initiale, on dérive la solution générale de (E), puis on remplace pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues qu'il suffit de résoudre.
Pour le 2., la difficulté est que comme le deuxième membre est une somme, on devra séparer le second membre en deux morceaux, et chercher une solution particulière pour chacun des deux morceaux. En ajoutant ces deux solutions particulières trouvées, on obtiendra une solution particulière de (E).

Exercice 5.10. Toujours le même genre de méthode.
1. : on cherche une solution particulière sous la forme $y = x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$;
2. : on coupe en deux le second membre, comme pour le 2. de l'exercice précédent.
3. : on cherche une solution particulière sous la forme $y = (ax^2 + bx)e^{2x}$.
4. : comme d'habitude.

Exercice 5.11. Appliquer la méthode décrite dans le paragraphe **5.4.9**, p.118.

Exercice 5.12. Aucune difficulté en se laissant guider, mais il faut bien penser à revenir à la variable x initiale à la fin (ne pas laisser le résultat en la variable u).

Exercice 5.13. Appliquer la méthode décrite dans le paragraphe **5.4.9**, p.118.

Solutions des exercices

Chapitre 1

1. Solutions des exercices sur les limites, la continuité et la dérivation

Exercice 1.1.

a) Soit $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5}$; $f(1)$ n'existe pas. On peut factoriser $(x-1)$ au dénominateur, on a $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{(x-1)(x-5)} = \dfrac{1}{x-1}\,\dfrac{2x^2+x-1}{x-5}$

D'une part $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-1}{x-5} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$; d'autre part $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$. Donc en appliquant les règles d'opérations sur les limites :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}\ \underbrace{\frac{2x^2+x-1}{x-5}}_{\substack{\downarrow\\ -\frac{1}{2}}} = -\infty, \text{ et de même,}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\substack{\downarrow\\ -\infty}}\ \underbrace{\frac{2x^2+x-1}{x-5}}_{\substack{\downarrow\\ -\frac{1}{2}}} = +\infty.$$

b) On prend ici aussi $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5}$.

$f(x)$ est une fraction rationnelle, la limite à l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite à l'infini du rapport de ses termes de plus haut degré, donc on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

c) Ici, on prend $f(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{x^2-6x+5}$; $f(1)$ n'existe pas, mais 1 annule aussi le numérateur (forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ »). On peut donc factoriser $(x-1)$ au numérateur *et* au dénominateur :

$f(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{x^2-6x+5} = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x-5)} = \dfrac{2x+1}{x-5}$ et sous cette forme, il est évident que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{2+1}{1-5} = -\dfrac{3}{4}$.

d) Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$; le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0. Pour les expressions avec radicaux ($\sqrt{\ }$) il est souvent possible de lever une indétermination avec la technique de la « quantité conjuguée » :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+1}-1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

Sous cette forme, il est évident que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Autre méthode : on peut faire le changement de variable $x^2 = h$, quand $x \to 0$, on a aussi $x^2 \to 0$, et on se ramène ainsi au calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h}$, on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ entre 1 et $1+h$, et on sait que la limite de ce taux d'accroissement, pour $h \to 0$ est, parce que la fonction g est dérivable en 1, exactement le nombre dérivé $g'(1)$. Comme on sait que $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on a donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = g'(1) = \frac{1}{2}$$

e) On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; ici $f(x)$ n'est pas une fraction rationnelle, on ne peut pas appliquer directement la méthode « des termes de plus haut degré », mais on appliquera une technique de factorisation (on notera que pour $x \to +\infty$, on a $x > 0$ donc $|x| = x$).

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-1}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x} = \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{1+0}-0 = 1$.

f) Comme dans d), on prend ici $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$; ici aussi, on factorise la plus grande puissance possible de x, mais attention, ici, on est en $-\infty$, donc on a $x < 0$ et

$|x| = -x$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-1}}{x^2} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x^2} = \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x^2}x$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x^2}.$$

Sous cette forme, on trouve aisément que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\sqrt{1+0}-0 = 0$.

g) Posons $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$; ici $x \to +\infty$ donc $x > 0$ et en particulier $\ln(x^2) = 2\ln x$.

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 2\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Sous cette forme, comme on connaît la limite de référence $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, il est clair que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+0\ln(1+0) = 0$.

h) Soit $f(x) = x\ln(x+x^2)$; l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$ et on cherchera la limite de f en 0+.

La limite demandée est indéterminée, du type « $0\times\infty$ ». Mais on peut écrire $f(x) = x\ln(x(1+x)) = x\ln x + x\ln(1+x)$. La limite $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$ est une limite de référence et il est évident que $\lim_{x\to0} x\ln(1+x) = 0\ln(1+0) = 0\times0 = 0$, donc on a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$.

i) Soit $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x+x^2)} = \dfrac{x}{\ln x+\ln(1+x)}$; ici aussi, $f(x)$ n'existe que pour $x > 0$, donc on cherchera la limite en 0+.

Il n'y a ici aucune indétermination, car le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers l'infini : on a donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$.

j) Soit $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^3+2}$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour se ramener à une limite de référence, on posera $\sqrt{x} = t$ et donc $x = t^2$; pour $x \to +\infty$, on a aussi $t \to +\infty$.

On peut écrire $f(x) = \dfrac{e^t}{t^6+2} = g(t)$ et il suffit donc de trouver la limite, pour $t \to +\infty$, de $g(t)$.

On écrit $g(t) = \dfrac{e^t}{t^6\left(1+\frac{2}{t^6}\right)} = \dfrac{e^t}{t^6}\dfrac{1}{1+\frac{2}{t^6}}$

On sait que $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$, quel que soit α, donc ici, en particulier, on a $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^6} = +\infty$, et comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{2}{t^6} = 0$, il est clair que $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{t^6}} = 1$, donc on peut conclure que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$.

k) Soit $f(x) = e^{-x}\ln x$. On est en présence d'une forme indéterminée « $0\times\infty$ » ; pour pouvoir utiliser les limites de référence, on écrit

$$f(x) = \frac{\ln x}{e^x} = \frac{\ln x}{x}\,\frac{x}{e^x} = \frac{\ln x}{x}\,\frac{1}{\frac{e^x}{x}}.$$

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\times 0 = 0$.

l) Soit $f(x) = e^x \ln x$; l'ensemble de définition de la fonction f est $]0,+\infty[$, donc il n'y a aucun sens à chercher sa limite en $-\infty$: cette question était un piège et l'expression $f(x) = e^x \ln x$ n'a pas de limite pour $x \to -\infty$.

m) Soit $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et que $\ln(1) = 0$, on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty\times 0$ ». On posera $h = \frac{1}{x}$, donc $x = \frac{1}{h}$. Pour $x \to +\infty$, on a $h \to 0+$, donc en posant $f(x) = \frac{1}{h}\ln(1+h) = g(h)$, on se ramène ainsi à la recherche de la limite pour $h \to 0+$ de $g(h)$.

Mais en écrivant $g(h) = \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}$, on reconnaît en $g(h)$ le taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+h$, et, la fonction ln étant dérivable, la limite, pour $h \to 0$ de ce taux d'accroissement n'est rien d'autre que le nombre dérivé de cette fonction en 1 ; or, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc on a

$$\lim_{h\to0} g(h) = \lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1;$$

aussi, en particulier $\lim_{\substack{h\to0\\h>0}} g(h) = 1$.

On peut conclure : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{h\to0\\h>0}} g(h) = 1$.

n) Soit $f(x) = \ln x\,\ln(x+1)$; l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$, donc on étudiera la limite de $f(x)$ en 0+. Comme $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty$ et que $\ln(1) = 0$, on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty\times 0$ ».

Pour lever cette indétermination, on multiplie et on divise par x :

$$f(x) = (x\ln x)\,\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ (c'est une limite de référence), et d'autre part, on vient de voir, à la question m) précédente, que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Dans cette expression, h est une variable « muette » donc on a aussi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et on peut conclure que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0\times 1 = 0$.

o) Soit $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$; l'ensemble de définition de f est encore $]0,+\infty[$, donc on étudiera la limite de $f(x)$ en 0+.
Le dénominateur de $f(x)$ tend vers l'infini, tandis que le numérateur tend vers 0, ce n'est donc pas une forme indéterminée : on écrit $f(x) = \ln(x+1)\,\dfrac{1}{\ln x}$; on a :
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1) = \ln(1) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0\times 0 = 0$.

p) On reconnaît en $\dfrac{e^x-e}{x-1} = \dfrac{e^x-e^1}{x-1}$ le taux d'accroissement entre x et 1 de la fonction exponentielle exp : $x \longmapsto \exp(x) = e^x$; cette fonction est dérivable, on a $\exp'(x) = \exp(x)$, donc la limite, pour $x \to 1$ de ce taux d'accroissement est égal au nombre dérivé en 1 de cette fonction :
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1} = \exp'(1) = \exp(1) = e^1 = e$.

q) Soit $f(x) = \dfrac{\ln(2x-3)}{x-1}$.
$f(x)$ existe pour $x \neq 1$ et à condition que $2x-3 > 0$, donc $x > \frac{3}{2}$: l'ensemble de définition de f est donc $]\frac{3}{2},+\infty[$, et 1 n'est pas dans cet intervalle, ni à la frontière de cet intervalle : il n'y a donc aucun sens à rechercher la limite, pour $x \to 1$, de $f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas (cette question était aussi un piège).

r) On pose ici aussi $f(x) = \dfrac{\ln(2x-3)}{x-1}$; pour $x \to +\infty$, le numérateur de cette expression tend vers $+\infty$, et le dénominateur aussi : on est donc en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour lever cette indétermination, on va factoriser x et essayer de se ramener à la limite de référence $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

$$f(x) = \frac{\ln\left(x\left(2-\frac{3}{x}\right)\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x+\ln\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{x}\,\frac{1}{1-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\,\frac{\ln\left(2-\frac{3}{x}\right)}{1-\frac{1}{x}}.$$

Sous cette forme, on a complètement résolu le problème, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,\frac{1}{1-0} + 0\,\frac{\ln(2-3\times 0)}{1-0} = 0\times 1 + 0\times \ln 2 = 0.$$

s) Soit $f(x) = \dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$.

On sait que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ (par exemple parce que $\dfrac{\sin h}{h} = \dfrac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h}$: on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction sin entre 0 et h, la limite de cette quantité, pour $h \to 0$, est $\sin'(0) = \cos(0) = 1$).

On en déduit qu'on a aussi $\lim_{h\to 0} \dfrac{\tan h}{h} = 1$ (parce que $\tan h = \dfrac{\sin h}{\cos h}$).

En prenant $h = 3x$ pour le numérateur et $h = 5x$ pour le dénominateur, comme on peut écrire :

$f(x) = \dfrac{\dfrac{\tan 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 5x}{5x}}\,\dfrac{3}{5}$, sous cette forme, il est clair que $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{3}{5}$.

t) Soit $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$.

On a $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}\,\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}$; on a vu à la question précédente que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

En raisonnant de la même façon : $\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{e^x - e^0}{x-0}$ est le taux d'accroissement de la fonction exp : $x \longmapsto e^x$ entre 0 et x, donc on a

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = e^0 = 1$, et finalement $\lim_{x\to 0} f(x) = 1\,\dfrac{1}{1} = 1$.

u) Soit $f(x) = \dfrac{e^x-1}{\sin x}$; le numérateur de $f(x)$ tend vers $e^\pi - 1 > 0$ lorsque $x \to \pi$, tandis que le dénominateur tend vers 0 ($\sin\pi = 0$). Il y a donc lieu de distinguer limite à droite et limite à gauche :

Pour $x \in]0,\pi[$, on a $\sin x > 0$, donc $\lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \sin x = 0+$ et donc $\lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f(x) = +\infty$.

De même, pour $x \in]\pi, 2\pi[$, on a $\sin x < 0$, donc $\lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} \sin x = 0-$ et donc $\lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} f(x) = -\infty$.

v) Soit $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$; on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On factorise x au numérateur, dans $\ln(x+1)$:

$f(x) = \dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = \dfrac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.

Sous cette forme, il n'y a plus d'indétermination (« $\frac{0}{\infty}$ »n'est pas une forme indéterminée) , car $\ln(1) = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc finalement $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

w) Soit $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; à cause du carré au dénominateur, les tentatives pour traiter $f(x)$ comme un taux d'accroissement n'aboutissent pas. L'astuce consiste à penser à utiliser une formule de trigonométrie pour se ramener à $\frac{\sin u}{u}$:

On a $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$, donc $\sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2t)$. Du coup, en posant $2t = x$ donc $t = \frac{x}{2}$, on a $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

On a donc $f(x) = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = 2\dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ (en posant $t = \frac{x}{2}$).

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, on peut conclure que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{1}{2}.$$

x) Soit $f(x) = \dfrac{2\cos x - \sqrt{3}}{2\sin x - 1}$; on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ », puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En présence d'une indétermination de ce type, il est souvent efficace d'essayer d'introduire des taux d'accroissements.

Soit $g(x) = 2\cos x$; on a $g(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$, ainsi le numérateur de $f(x)$ peut s'écrire $N(x) = g(x) - g(\frac{\pi}{6})$.

De même, soit $h(x) = 2\sin x$; on a $h(\frac{\pi}{6}) = 1$ de sorte que le numérateur de $f(x)$ peut s'écrire $D(x) = h(x) - h(\frac{\pi}{6})$.

On a alors $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{g(x)-g(\frac{\pi}{6})}{h(x)-h(\frac{\pi}{6})} = \dfrac{\frac{g(x)-g(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}}{\frac{h(x)-h(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}}$

Les fonctions g et h étant dérivables (en particulier en $\frac{\pi}{6}$), on a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{g(x)-g(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}} = g'(\frac{\pi}{6}) \text{ et } \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{h(x)-h(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}} = h'(\frac{\pi}{6}).$$

Or, on a $g'(x) = -2\sin x$ et $h'(x) = 2\cos x$, donc $g'(\frac{\pi}{6}) = -1$ et $h'(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$, de sorte qu'on peut conclure :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 1.2.

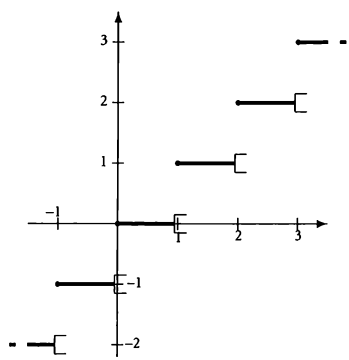
1. Soit $x_0 = n$ un entier relatif ($x_0 = n \in \mathbb{Z}$). La définition de la fonction partie entière permet d'affirmer que pour $x \in [n, n+1[$, on a $E(x) = n$ (puisqu'on a bien $n \leqslant x < n+1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Donc, on a $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x) = n$.

   Mais d'autre part, pour $x \in [n-1, n[$, on a $n-1 \in \mathbb{Z}$ et $n-1 \leqslant x < (n-1)+1$, donc $E(x) = n-1$. On a donc $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) = n-1$.

   Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, il existe $n_0 = E(x_0)$ tel que $x_0 \in [n_0, n_0+1[$; comme on vient de le voir, pour tout $x \in [n_0, n_0+1[$, on a aussi $E(x) = n_0$. On a donc $\lim\limits_{x \to x_0} E(x) = n_0 = E(x_0)$.

   La limite à droite de la fonction E coïncide avec sa limite à gauche en tous les points non entier, mais est différente pour les x_0 entiers : donc la fonction E est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et discontinue sur $\mathbb{Z}$.

   Voici l'aspect de la courbe représentative de la fonction E (pour $x \in]-1{,}5; 3{,}5[$)



2. Comme la fonction $x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, partout où la fonction E était continue, la fonction f est aussi continue (somme de fonctions continues). En revanche, là où E n'était pas continue, la fonction f ne peut pas être continue, car on a $E(x) = x - f(x)$, et lorsque f est continue en x_0, par addition, E est aussi continue en x_0.

   Finalement, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et discontinue sur $\mathbb{Z}$.

   On doit montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$.

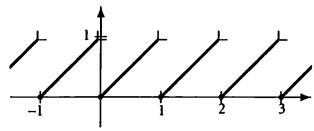
   Or, si $n_0 = E(x)$, on a $n_0 \leqslant x < n_0 + 1$, donc $n_0 + 1 \leqslant x + 1 < (n_0 + 1) + 1$, et comme $n_0 + 1 \in \mathbb{Z}$, cela prouve que $E(x+1) = n_0 + 1 = E(x) + 1$.

   On a donc $f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = x + 1 - (E(x) + 1) = x - E(x) = f(x)$, ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est bien périodique de période 1.

   Il suffit donc, pour faire la représentation graphique de f, de faire sa représentation sur $[0, 1[$, puis de compléter par translations.

   Mais pour $x \in [0, 1[$, on a $E(x) = 0$, donc $f(x) = x$.

   Voici donc l'aspect de la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-1{,}5; 3{,}5]$.



3. On peut écrire $g(x) = -f(x) + f(x)^2$. Partout où la fonction f est continue (donc sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), on est sûr que la fonction g sera continue. En revanche, on n'est pas sûr de la continuité de g sur $\mathbb{Z}$.

   La non-continuité de f en $n_0 \in \mathbb{Z}$ n'entraîne en aucun cas la non continuité de g en n_0.

   Étudions les limites à droite et à gauche de la fonction g en $n_0 \in \mathbb{Z}$; auparavant, on remarque que $g(n_0) = -f(n_0) + f(n_0)^2 = -0 + 0^2 = 0$.

   Tout d'abord, puisque $\lim\limits_{\substack{x \to n_0 \\ x > n_0}} \mathrm{E}(x) = n_0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n_0 \\ x < n_0}} \mathrm{E}(x) = n_0 - 1$, on peut affirmer que

$$\lim_{\substack{x \to n_0 \\ x > n_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to n_0 \\ x > n_0}} x - \mathrm{E}(x) = n_0 - n_0 = 0$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \to n_0 \\ x < n_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to n_0 \\ x < n_0}} x - \mathrm{E}(x) = n_0 - (n_0 - 1) = 1.$$

   On a donc

$$\lim_{\substack{x \to n_0 \\ x > n_0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to n_0 \\ x > n_0}} -f(x) + f(x)^2 = -0 + 0^2 = 0$$

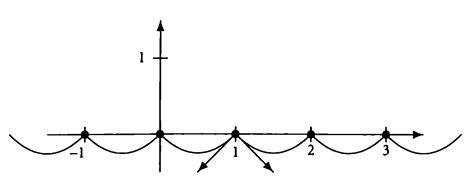
$$\text{et } \lim_{\substack{x \to n_0 \\ x < n_0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to n_0 \\ x < n_0}} -f(x) + f(x)^2 = -1 + 1^2 = 0.$$

   Comme la limite à droite et la limite à gauche de g en n_0 coïncident, et coïncident avec $g(n_0)$, on peut affirmer que g est continue en n_0.

   Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

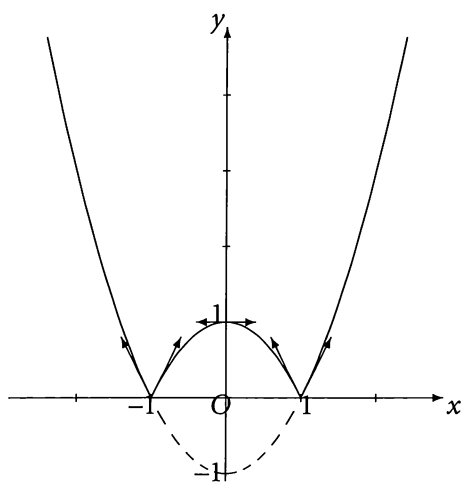
   Puisque f est périodique de période 1, et puisque $g(x) = -f(x) + f(x)^2$, il est évident que g est aussi périodique de période 1 :
   $g(x+1) = -f(x+1) + f(x+1)^2 = -f(x) + f(x)^2 = g(x)$.

   Pour faire la représentation graphique de g, il suffit de représenter cette fonction pour $x \in [0, 1[$ et de compléter par translations. Puisque $f(x) = x$ sur cet intervalle, on a $g(x) = -x + x^2$ sur cet intervalle, ce qui fait que la courbe de f est la partie de la parabole d'équation $y = x^2 - x$ comprise entre les deux points d'intersection avec l'axe des abscisses. Voici son aspect.



Notons la présence de points anguleux pour chaque nombre entier. En effet, par exemple en 1, la dérivée à gauche se calcule avec la formule de f sur $[0,1[$, c'est-à-dire en dérivant $f(x) = -x + x^2$, donc $f'(x) = -1 + 2x$ sur $]0,1[$, et on a donc $f'_g(1) = 1$, tandis qu'à droite, c'est la formule sur $[1,2[$ qu'il faut dériver, or, on a $f(x) = -(x-1) + (x-1)^2$ sur cet intervalle, et $f'(x) = -1 + 2(x-1)$ sur $]1,2[$, et donc $f'_d(1) = -1$.

Exercice 1.3. Voici une représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto |x^2 - 1|$ (obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses de la partie négative de la courbe de $x \longmapsto x^2 - 1$)



On voit sur cette courbe la présence de deux points anguleux correspondant aux valeurs $x = -1$ et $x = 1$, qui sont les valeurs pour lesquelles $x^2 - 1$ s'annule en changeant de signe. On peut ainsi deviner que la fonction f n'est pas dérivable en $x = -1$ et $x = 1$ mais qu'elle est dérivable partout ailleurs, et d'autre part qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrons ces conjectures.

Pour ce qui est de la continuité, il n'y a de toutes façons aucun problème, puisque l'expression définissant f ne contient que des fonctions continues, donc f est continue sur son ensemble de définition, qui est $\mathbb{R}$.

En revanche, l'expression définissant f utilise la fonction valeur absolue ($x \longmapsto |x|$) qui n'est pas dérivable en 0, donc on ne peut pas garantir la dérivabilité de f partout. Comme le problème de dérivabilité de la fonction valeur absolue se situe en 0, on peut en déduire que f est dérivable pour tous les x qui n'annulent pas la quantité $(x^2 - 1)$ dont on prend la valeur absolue, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On peut aussi le vérifier autrement :
Pour $x \in [-1,1]$, on a $x^2 - 1 \leqslant 0$, donc $f(x) = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$;
Pour $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, on a $x^2 - 1 \geqslant 0$, donc $f(x) = x^2 - 1$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 1$.
f coïncide avec g sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, et f coïncide avec $-g$ sur $[-1,1]$.

Donc sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$, on a f qui est dérivable et $f'(x) = g'(x) = 2x$.
Sur $]-1,1[$, on a aussi f qui est dérivable et $f'(x) = -g'(x) = -2x$. En particulier f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

En -1 :
Puisque $f(x) = g(x)$ sur $]-\infty,-1]$, f est dérivable à gauche en -1 et on a
$f'_g(-1) = g'(-1) = -2$.
Puisque $f(x) = -g(x)$ sur $[-1,1]$, f est dérivable à droite en -1 et on a
$f'_d(-1) = -g'(-1) = 2$.
Puisque $f'_g(-1) = 2 \neq -2 = f'_d(-1)$, f n'est pas dérivable en -1.

En -1 :
Puisque $f(x) = g(x)$ sur $[1,+\infty[$, f est dérivable à droite en 1 et on a
$f'_d(1) = g'(1) = 2$.
Puisque $f(x) = -g(x)$ sur $[-1,1]$, f est dérivable à gauche en 1 et on a
$f'_g(1) = -g'(1) = -2$.
Puisque $f'_g(1) = -2 \neq 2 = f'_d(1)$, f n'est pas dérivable en 1.

Remarque : f est clairement une fonction paire, donc la non-dérivabilité de f en 1 impliquait que f ne peut pas être dérivable en -1.

Exercice 1.4. La fonction : $f : x \longmapsto \dfrac{1+\cos(x)}{1-\sin(x)}$ est dérivable, car l'expression qui la définit ne contient que des fonctions dérivables et des opérations élémentaires. Cela signifie qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition. Pour prouver qu'elle est dérivable sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, il suffit de prouver que cet intervalle est inclus dans l'ensemble de définition de f. Or, le seul problème de définition de f est le fait qu'il y ait un dénominateur qui ne doit pas s'annuler. $1-\sin x$ s'annule lorsque $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, et comme on a pris la précaution d'enlever $\frac{\pi}{2}$ de l'intervalle qu'on considère, on est sûr que f est dérivable sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.
Déterminons sa dérivée :

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\sin x} = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{donc}$$
$$f'(x) = \left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)(x) = \frac{(-\sin x)(1-\sin x)-(1+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$
$$= \frac{-\sin x+\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x-\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

Exercice 1.5.

1. La première chose à faire est de vérifier que f est bien définie au voisinage de 0. La quantité sous le radical, $x^{n+1}+x^n = x^n(x+1)$ doit être positive ou nulle. Mais si $x+1$ est positif sur $]-1,+\infty[$, le signe de x^n dépend de la parité de n :

   Si n est pair $(n = 2k, k \in \mathbb{N}^*)$:

$x^n \geqslant 0$ pour tout n, et f est définie sur $]-1,+\infty[$, donc à droite et à gauche de 0. Calculons le taux d'accroissement de f entre 0 et x ; on a :

$$T_{f,0,x} = \frac{\sqrt{x^n(x+1)}}{x} = \frac{\sqrt{x^{2k}}}{x}\sqrt{x+1} = \frac{|x|^k}{x}\sqrt{x+1}.$$

- Pour $x>0$, $T_{f,0,x} = x^{k-1}\sqrt{x+1}$;
  - ★ pour $k=1$, $k-1=0$ et $x^{k-1}=x^0=1$, donc on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} T_{f,0,x}=1$, et f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0)=1$.
  - ★ Pour $k>1$, $k-1>0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} x^{k-1}=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} T_{f,0,x}=0$, et f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0)=0$.
- Pour $x<0$, on a $T_{f,0,x} = \dfrac{(-x)^k}{x}\sqrt{x+1} = (-1)^k x^{k-1}\sqrt{x+1}$, donc
  - ★ Pour $k=1$ ($n=2$), $k-1=0$ et $(-1)^k x^{k-1}\sqrt{x+1} = (-1)x^0\sqrt{x+1} = -\sqrt{x+1}$ donc
    $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} T_{f,0,x}=-1$ et f est dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0)=-1$; mais comme dans ce cas, on a vu que $f'_d(0)=1\neq -1=f'_g(0)$, f n'est pas dérivable en 0, $f'(0)$ n'existe pas, la courbe de f admet en son point d'abscisse 0 un point anguleux, avec deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents.
  - ★ Pour $k>1$, (n pair et $n\geqslant 4$) $k-1>0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} x^{k-1}=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} T_{f,0,x}=0$, et f est dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0)=0$.

Si n est impair ($n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$) :

On n'étudie que la limite à droite en 0, puisque f n'est pas définie sur $]-1,0[$. On a donc $x>0$ dans le calcul du taux d'accroissement, et donc en reprenant le calcul vu plus haut,

$$T_{f,0,x} = \frac{\sqrt{x^n(x+1)}}{x} = \frac{\sqrt{x^{2k+1}}}{x}\sqrt{x+1} = \frac{|x|^k\sqrt{x}}{x}\sqrt{x+1} = x^{k-\frac{1}{2}}\sqrt{x+1};$$

on a encore deux cas à étudier :

- ★ Si $k=0$ ($n=1$), $T_{f,0,x} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} T_{f,0,x}=+\infty$ et f n'est dérivable à droite en 0, $f'_d(0)$ n'existe pas.
- ★ Si $k>0$ (n impair et $n\geqslant 3$), on a donc $k\geqslant 1$ et on a $T_{f,0,x} = x^{k-\frac{1}{2}}\sqrt{x+1}$ avec $k-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}>0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{k-\frac{1}{2}}=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} T_{f,0,x}=0$, donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$.

On peut récapituler les résultats que nous venons d'obtenir dans un tableau selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$:

n	1	2	3	4	5	6	...
$f'_d(0)$	$+\infty$	1	0	0	0	0	...
$f'_g(0)$	$\times$	-1	$\times$	0	$\times$	0	...
$f'(0)$	$\times$	$\times$	$\times$	0	$\times$	0	...

2. $f(x)$ est de la forme $\sqrt{u}$, avec $u = u(x) = x^{n+1}+x^n$, donc $u' = u'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1}$, et donc (en tenant compte que $x > 0$)

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{x^{n-1}((n+1)x+n)}{2\sqrt{x^n(x+1)}} = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}((n+1)x+n)}{2\sqrt{x+1}}$$

Exercice 1.6.

a) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = e^u$ avec $u = u(x) = \frac{1}{1-x}$; $u' = u'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, donc $f'(x) = u'e^u = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}}$.

b) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \sin x + 1}{2\sin^2 x - 1}$; il est pertinent d'écrire $f(x) = g(u(x)) = g(u)$, avec $u = u(x) = \sin x$ et $g(y) = \dfrac{y^2 - y + 1}{2y^2 - 1}$; on a alors (en utilisant $g = \frac{v}{w}$ donc $g' = \frac{v'w - vw'}{w^2}$ pour $v = y^2 - y + 1$ et $w = 2y^2 - 1$, donc $v' = 2y - 1$ et $w' = 4y$) :

$$g'(y) = \frac{(2y-1)(2y^2-1) - (y^2-y+1)(4y)}{(2y^2-1)^2}$$
$$= \frac{(4-4)y^3 + (-2+4)y^2 + (-2-4)y + 1}{(2y^2-1)^2} = \frac{2y^2 - 6y + 1}{(2y^2-1)^2}.$$

Donc $f'(x) = u' \cdot g'(u) = \cos x \dfrac{2\sin^2 x - 6\sin x + 1}{(2\sin^2 x - 1)^2}$

c) $f(x) = \sin(\ln x) = \sin u$ avec $u = u(x) = \ln x$, donc $u' = \dfrac{1}{x}$ et

$$f'(x) = u' \cos u = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

d) $f(x) = \ln(\sin x) = \ln u$ avec $u = u(x) = \sin x$, donc $u' = \cos x$ et

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}} = \sqrt{u}$, avec $u = \dfrac{2-\sin x}{2-\cos x} = \dfrac{v}{w}$, en posant $v = 2 - \sin x$ et $w = 2 - \cos x$, donc $v' = -\cos x$ et $w' = \sin x$; on a donc

$$u' = \frac{v'w - vw'}{w^2} = \frac{(-\cos x)(2-\cos x) - (2-\sin x)(\sin x)}{(2-\cos x)^2}$$

$$u' = \frac{-2\cos x + \cos^2 x - 2\sin x + \sin^2 x}{(2-\cos x)^2} = \frac{1 - 2\cos x - 2\sin x}{(2-\cos x)^2}$$

et finalement

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1-2\cos x - 2\sin x}{(2-\cos x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}}};$$

en tenant compte que $2-\sin x$ et $2-\cos x$ sont des nombres strictement positifs (puisque $|\sin x| \leqslant 1$ et $|\cos x| \leqslant 1$), on a donc

$$f'(x) = \frac{1-2\cos x - 2\sin x}{2(2-\cos x)^{\frac{3}{2}}(2-\sin x)^{\frac{1}{2}}}$$

f) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = uv$ avec $u = u(x) = x$ (donc $u' = 1$) et $v = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \sqrt{w}$, en posant $w = \dfrac{1+x}{1-x}$; il est clair que

$$w' = \frac{2}{(1-x)^2}, \text{ donc } v' = \frac{w'}{2\sqrt{w}} = \frac{2}{(1-x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

On obtient donc

$$f'(x) = u'v + uv' = 1\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + x\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-x)(1+x)+x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1+x-x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

Remarque : Ces calculs sont valables car l'ensemble de dérivabilité de f est $]-1,1[$; Dans cet ensemble, on a bien $1-x>0$ et $1+x>0$.

Exercice 1.7.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; il est clair que $f'(x) = -\dfrac{(-1)}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$; c'est sous cette forme qu'il est le plus facile de continuer f, car $f'(x)$ est de la forme u^α, et on sait que $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$:

$$f^{(2)}(x) = (-2)(-1)(1-x)^{-3} = 2(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3};$$

$$f^{(3)}(x) = (-3)(-1)(1-x)^{-4} = 6(1-x)^{-4} = \frac{2}{(1-x)^4};$$

on peut continuer à calculer quelques termes mais on peut aussi conjecturer dès maintenant que $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}} = k!(1-x)^{-k-1} \quad (*)$.

Cette formule est vraie à l'ordre $k = 0, 1, 2, 3$; supposons la vraie à l'ordre $n \geqslant 0$: on aura alors :

$$f^{(k+1)}(x) = (f^k)'(x) = k!(-k-1)(-1)(1-x)^{-k-2} = k!(k+1)(1-x)^{-(k+2)}$$

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}}.$$

On a prouvé que si la formule $(*)$ est vraie à l'ordre k, elle est encore vraie à l'ordre $k+1$; comme elle est vraie à l'ordre 0, elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

On a prouvé que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

b) Tout d'abord, il est clair que f est une fonction polynôme de degré $p+2$, donc si $n > p+2$, on aura $f^{(n)}(x) = 0$.

Pour $n = 1$, on a

$$f'(x) = 2x(1+x)^p + px^2(1+x)^{p-1} = x(1+x)^{p-1}(2+p(1+x))$$
$$f'(x) = x(1+x)^{p-1}(2+p+px).$$

Comme $f(x)$ est sous la forme $f = gh$ avec $g(x) = (x+1)^p$ et $h(x) = x^2$, il semble pertinent de penser à utiliser la formule de Leibnitz pour trouver $f^{(n)}(x)$ pour $2 \leqslant n \leqslant p+2$.

Remarquons tout d'abord que

$g'(x) = g^{(1)}(x) = p(x+1)^{p-1}$, $g^{(2)}(x) = p(p-1)(x+1)^{p-2}$,

et par une récurrence immédiate,

$g^{(k)}(x) = \overbrace{p(p-1)\cdots(p-k+1)}^{k \text{ facteurs}}(x+1)^{p-k} = \dfrac{p!}{(p-k)!}(x+1)^{p-k}$ (pour $0 \leqslant k \leqslant p$) et $g^{(k)}(x) = 0$ si $k > n$.

D'autre part $h'(x) = h^{(1)}(x) = 2x$ et $h^{(2)}(x) = 2$, tandis que $h^{(k)}(x) = 0$ pour $k > 2$.

On a donc, pour $2 \leqslant n \leqslant p$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g^{(n-j)}(x) h^{(j)}(x)$$

Dans cette somme, seuls les trois premiers termes sont non nuls, car $h^{(j)}(x) = 0$ pour $j \geqslant 3$, donc

$$(3)\qquad f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} g^{(n)}(x)h^{(0)}(x) + \binom{n}{1} g^{(n-1)}(x)h^{(1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(n-2)}(x)h^{(2)}(x)$$
$$= \frac{p!}{(p-n)!}(x+1)^{p-n}x^2 + n\frac{p!}{(p-n+1)!}(x+1)^{p-n+1} \cdot 2x +$$
$$+ \frac{p(p-1)}{2}\frac{p!}{(p-n+2)!}(x+1)^{p-n+2} \cdot 2$$

$$(4)\qquad f^{(n)}(x) = \frac{p!\,(x+1)^{p-n}}{(p-n+2)!}\Big((p-n+1)(p-n+2)x^2 +$$
$$+ 2n(p-n+2)x(x+1) + n(n-1)(x+1)^2\Big).$$

Cette expression est difficile à simplifier plus.

Traitons maintenant les 3 exceptions : $n = 1$, $n = p+1$ et $n = p+2$.

Pour $n = 1$, on a déjà calculé
$f'(x) = x(x+1)^{p-1}((p+2)x+2)$.

Pour $n = p+1$, dans l'expression (3), le premier terme est nul, puisque
$g^{(p+1)}(x) = 0$, et on a $g^{(n-1)}(x) = g^{(p)}(x) = p!$, tandis que
$g^{(n-2)}(x) = g^{(p-1)}(x) = \frac{p!}{1!}(x+1) = p!(x+1)$, de sorte que
$f^{(p+1)}(x) = 2(p+1)\,p!\,x + (p+1)p\,p!(x+1) = (p+1)!((p+2)x+p)$.

Pour $n = p+2$, dans l'expression (3), ce sont les deux premiers termes qui sont nuls, et on a $g^{(n-2)}(x) = p!$, de sorte que
$f^{(p+2)}(x) = (p+2)(p+1)p! = (p+2)!$ (résultat qu'on peut aussi retrouver directement en dérivant $f^{(p+1)}$, ou encore plus simplement en remarquant que f est un polynôme unitaire de degré $p+2$.

Il est intéressant de chercher aussi la valeur de $f^{(p)}(x)$ (même si la formule générale (4) s'applique, elle se simplifie un tout petit peu).

$$f^{(p)}(x) = \frac{p!}{2}(1 \times 2x^2 + 2p \times 2x(x+1) + p(p-1)(x+1)^2)$$
$$= \frac{p!}{2}((2+4p+p^2-p)x^2 + (4p+2p^2-2p)x + (p^2-p))$$
$$= \frac{p!}{2}((p^2+3p+2)x^2 + 2(p^2+p)x + (p^2-p))$$
$$f^{(p)}(x) = \frac{p!}{2}((p+1)(p+2)x^2 + 2p(p+1)x + p(p-1)).$$

On constate qu'en dérivant cette expression, on retombe bien sur ce qu'on avait obtenu pour $f^{(p+1)}(x)$.

c) $f(x) = \sin x$; on a $f'(x) = f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$ et enfin $f^{(4)}(x) = \sin x$, de sorte qu'on devine qu'on peut obtenir un résultat avec une étude de cas, la valeur de $f^{(k)}(x)$ dépendant du reste modulo 4 de k. Mais si on veut obtenir une formule sans étude de cas, il suffit de se rappeler que $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$. On peut donc conjecturer que $\sin^{(k)}(x) = \sin(x+k\frac{\pi}{2})$; cette formule est clairement vraie à l'ordre 0 (et aussi à l'ordre 1).

Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre k :

On a donc $\sin^{(k+1)}(x) = (\sin^{(k)})'(x)$ et comme $\sin^{(k)}(x) = \sin(x+k\frac{\pi}{2})$ par hypothèse de récurrence, on en déduit

$\sin^{(k+1)}(x) = \cos(x+k\frac{\pi}{2}) = \sin((x+k\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+(k+1)\frac{\pi}{2})$, et la récurrence est terminée : on a bien, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sin^{(k)}(x) = \sin(x+k\frac{\pi}{2}).$$

d) La formule de Leibnitz ne donne pas des résultats très pratiques. En fait une bonne méthode consiste à utiliser l'exponentielle complexe, en considérant que

$f(x) = \mathrm{Im}(e^x(\cos x + i\sin x)) = \mathrm{Im}(e^{(1+i)x})$.

On en déduit que $f^{(k)}(x) = \mathrm{Im}\left((1+i)^k e^{(1+i)x}\right)$.

Or, $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, de sorte que

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \mathrm{Im}\left(2^{\frac{k}{2}}(\cos(k\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(k\tfrac{\pi}{4}))e^x(\cos x + i\sin x)\right) \\ &= 2^{\frac{k}{2}}e^x \mathrm{Im}\left(\cos(x+k\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(x+k\tfrac{\pi}{4})\right) = 2^{\frac{k}{2}}e^x\sin(x+k\tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

Si on n'est pas convaincu par ce raisonnement, on peut cependant démontrer par récurrence le résultat : $f^{(k)}(x) = 2^{\frac{k}{2}}e^x\sin(x+k\frac{\pi}{4})$.

Ce résultat est trivial à l'ordre 0 (si on ne dérive pas f).

Supposons qu'on a, pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (arbitraire, mais fixé) :

$f^{(k)}(x) = 2^{\frac{k}{2}}e^x\sin(x+k\frac{\pi}{4})$.

Alors $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x)$ s'obtient en dérivant l'égalité précédente (on applique la formule de la dérivée d'un produit), et on utilisera de façon essentielle le fait que $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= 2^{\frac{k}{2}}\left(e^x\sin\left(x+k\tfrac{\pi}{4}\right) + e^x\cos\left(x+k\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}}e^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+k\tfrac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+k\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}}e^x\left(\sin\left(x+k\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x+k\tfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}}e^x\sin\left(x+(k+1)\tfrac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration par récurrence.

Exercice 1.8.

1. Le résultat est évident puisque la dérivée de x^k est kx^{k-1}.

2. On a $T_n = x(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = x\,\dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{x^{n+1}-x}{x-1}$.

3. Puisque $T_n'(x) = S_n(x)$, on peut trouver une expression de $S_n(x)$ en dérivant l'expression de $T_n(x)$ obtenue à la question précédente :

   $T_n(x) = \dfrac{x^{n+1}-x^n}{x-1} = \dfrac{u}{v}$ avec :

   $u = u(x) = x^{n+1}-x$, donc $u' = u'(x) = (n+1)x^n - 1$ et

   $v = v(x) = x-1$ donc $v' = v'(x) = 1$.

   Donc

   $$S_n(x) = T_n'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{((n+1)x^n-1)(x-1)-(x^{n+1}-x)1}{(x-1)^2}$$

   $$S_n(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Exercice 1.9.

1. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}, f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x}, \ldots$

   Il est clair (par une récurrence immédiate) que $f^{(k)}(x) = 2^k\mathrm{e}^{2x} = 2^k f(x)$, donc $f^{(k)}(0) = 2^k$.

2. On a

   $$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + h^n\varepsilon(h)$$

   avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$

   $$= \mathrm{e}^{2x_0} + 2\mathrm{e}^{2x_0}h + \frac{4\mathrm{e}^{2x_0}}{2!}h^2 + \frac{8\mathrm{e}^{2x_0}}{3!}h^3 + \cdots + 2^n\frac{\mathrm{e}^{2x_0}}{n!}h^n + h^n\varepsilon(h)$$

3. On remplace x_0 par 0 et h par x (facultatif !) :

   $$f(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Exercice 1.10. Puisqu'on a $1-X^n=(1-X)(1+X+X^2+\cdots+X^{n-2}+X^{n-1})$, avec $X=3x$, on trouve $1-(3x)^n=(1-3x)(1+3x+(3x)^2+\cdots+(3x)^{n-2}+(3x)^{n-1})$ et donc on peut écrire

$$\frac{1-(3x)^n}{1-3x}=1+3x+(3x)^2+\cdots+(3x)^{n-2}+(3x)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\text{donc}\quad \frac{1}{1-3x}&=1+3x+(3x)^2+\cdots+(3x)^{n-2}+(3x)^{n-1}+\frac{(3x)^n}{1-3x}\\&=1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\cdots+3^{n-2}x^{n-2}+3^{n-1}x^{n-1}+x^{n-1}\frac{3^nx}{1-3x}\\&=1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\cdots+3^{n-2}x^{n-2}+3^{n-1}x^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

$$\text{avec } \varepsilon(x)=\frac{3^nx}{1-3x}\xrightarrow[x\to0]{}0$$

On vient d'obtenir ainsi un d.l.$_0(n-1)$ de f, qu'on peut facilement transformer en un d.l.$_0(n)$: il suffit de poser $n'=n-1$ (puis $n=n'$)

$$\frac{1}{1-3x}=1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\cdots+3^{n-1}x^{n-1}+3^nx^n+x^n\varepsilon(x).$$

Exercice 1.11.

1. Deux méthodes, soit avec Taylor-Young, soit avec le d.l. de exp.
   Il est clair que $f^{(k)}(x)=(-3)^k\mathrm{e}^{3x}$ donc $f^{(k)}(0)=(-3)^k$ d'où (avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=0$)

$$\begin{aligned}f(x)&=1-3x+\frac{(-3)^2}{2}x^2+\frac{(-3)^3}{6}x^3+\frac{(-3)^4}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)\\&=1-3x+\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}x^3+\frac{27}{8}x^4+x^4\varepsilon(x).\end{aligned}$$

   Ou (autre méthode)

$$\begin{aligned}f(x)&=1+(-3x)+\frac{1}{2}(-3x)^2+\frac{1}{6}(-3x)^3+\frac{1}{24}(-3x)^4+(-3x)\varepsilon_1(-3x)\\&=1-3x+\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}x^3+\frac{27}{8}x^4+x^4\varepsilon_2(x).\end{aligned}$$

2. Ici aussi, deux méthodes, soit avec Taylor-Young, soit avec les d.l. de sin et de cos.
   Il est clair que $\sin'=\cos$, $\sin''=-\sin$, $\sin^{(3)}=-\cos$, $\sin^{(4)}=\sin\ldots$ donc
   $f'(x)=2\cos2x$, $f''(x)=-4\sin2x$, $f^{(3)}(x)=-8\cos2x$, $f^{(4)}(x)=16\sin2x$ et
   $f^{(5)}(x)=32\cos2x$, donc $f'(0)=2$, $f''(0)=0$, $f^{(3)}(0)=-8$, $f^{(4)}(0)=0$ et $f^{(5)}(0)=32$.
   On en déduit que (avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=0$)

$$\sin2x=2x-\frac{8}{6}x^3+\frac{32}{120}x^5+x^5\varepsilon(x)=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+x^5\varepsilon(x).$$

   Ou (autre méthode) :

$$f(x)=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+(2x)^5\varepsilon_1(2x)=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+x^5\varepsilon(x).$$

3. On est à peu près obligé de composer des développements limités si on ne veut pas obtenir des calculs épouvantables en essayant d'appliquer Taylor-Young.
   En posant $-x^3 = u$,

$$f(x) = \ln(1-x^3) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u) = -x^3 - \frac{(-x^3)^2}{2} + x^6\varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = -x^3 - \frac{x^6}{2} + x^6\varepsilon_1(x).$$

4. $f(x) = (1+u)^{\frac{1}{2}}$ avec $u = -x$. On a déjà vu plusieurs fois, en cours par exemple, le d.l.$_0(3)$ de cette fonction : $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + u^3\varepsilon(u)$.
   Donc $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$.

Exercice 1.12.

1. Avec ce genre de fonction, la formule de Taylor est opérationnelle :
   $f^{(k)}(x) = (-2)^k e^{-2x}$ et donc $f^{(k)}(-1) = (-2)^k e^2$. On a donc, pour $x = -1 + h$,

$$e^{-2x} = e^{-2(-1+h)} = e^2 - 2e^2h + \frac{4e^2}{2}h^2 + \frac{-8e^2}{6}h^3 + h^3\varepsilon(h)$$

$$e^{-2x} = e^2\left(1 - 2h + 2h^2 - \frac{4}{3}h^3\right) + h^3\varepsilon(h).$$

   On peut aussi travailler à partir du d.l.$_0(n)$ de exp :

$$e^{-2x} = e^{-2(-1+h)} = e^2e^{-2h} = e^2\left(1 + (-2h) + \frac{(-2h)^2}{2} + \frac{(-2h)^3}{3!} + h^3\varepsilon_2(h)\right)$$

   et on retrouve le même résultat.

2. Avec Taylor-Young : on sait que $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos^{(3)} = \sin$ et $\cos^{(4)} = \cos$ donc $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\cos'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $\cos^{(3)}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos^{(4)}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ donc pour $x = \frac{\pi}{3} + h$,

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}h - \frac{h^2}{2} + \frac{\sqrt{3}h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right) + h^4\varepsilon(h)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + \frac{1}{48}h^4 + h^4\varepsilon(h).$$

   On aurait aussi pu développer $\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos h - \sin\frac{\pi}{3}\sin h = \frac{1}{2}(\cos h - \sqrt{3}\sin h)$ et utiliser les d.l.$_0(4)$ de sin et cos : $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + h^4\varepsilon_1(h)$ et $\sin h = h - \frac{h^3}{6} + h^4\varepsilon_2(h)$.

Donc

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{3}+h) = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}+h^4\varepsilon_1(h)\right)-\sqrt{3}\left(h-\frac{h^3}{6}+h^4\varepsilon_2(h)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{1}{4}h^2+\frac{\sqrt{3}}{12}h^3+\frac{1}{48}h^4+h^4\varepsilon_3(h).$$

On trouve bien sûr le même résultat.

3. On a

$$f(x) = (3+x)^{-\frac{1}{2}} = \left(3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{3}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^2\varepsilon\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}x+\frac{\sqrt{3}}{72}x^2+x^2\varepsilon_1(x)$$

Autre méthode :

on remarque qu'on cherche le d.l.$_3(2)$ de la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}}$, donc on peut appliquer Taylor-Young. On a $g'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$ et $g''(t) = \frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}$, de sorte que $g'(3) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(\sqrt{3})^3} = \dfrac{\sqrt{3}}{18}$ et $g''(3) = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(\sqrt{3})^5} = \dfrac{\sqrt{3}}{36}$, donc finalement

$f(x) = g(3+x) = g(3)+g'(3)x+\frac{1}{2}g''(3)x^2+x^2\varepsilon_1(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{18}x+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{36}x^2+x^2\varepsilon_1(x)$ et on retrouve le même résultat.

À partir de cet exercice, même si on ne le précise pas, et sauf indication contraire, la fonction ε et $\forall i$ les fonctions ε_i sont telles que $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_i(t) = 0$.

Exercice 1.13.

1.

$$\sqrt{9+x} = 3\sqrt{1+\frac{x}{9}} = 3\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{9}-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{9}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{x}{9}\right)^3+x^3\varepsilon_1(x)\right)$$
$$= 3+\frac{1}{6}x-\frac{1}{216}x^2+\frac{1}{3888}x^3+x^3\varepsilon_2(x)$$
$$\ln(1+3x) = (3x)-\frac{1}{2}(3x)^2+\frac{1}{3}(3x)^3+x^3\varepsilon_3(x) = 3x-\frac{9}{2}x^2+9x^3+x^3\varepsilon_3(x).$$

Donc

$$f(x)=\left(3+\frac{1}{6}x-\frac{1}{216}x^2+\frac{1}{3888}x^3+x^3\varepsilon_2(x)\right)\left(3x-\frac{9}{2}x^2+9x^3+x^3\varepsilon_3(x)\right)$$
$$=9x+\left(-\frac{27}{2}+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(27-\frac{3}{4}-\frac{1}{72}\right)x^3+x^3\varepsilon_4(x)$$
$$f(x)=9x-13x^2+\frac{1889}{72}x^3+x^3\varepsilon_4(x)$$

Remarquons qu'on a calculé un terme de trop (qui ne sert à rien) avec le d.l.$_0(3)$ de la première fonction, on aurait pu se contenter du d.l.$_0(2)$ de $x\longmapsto\sqrt{9+x}$.

2. On a intérêt à écrire $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-x}$ et

$$\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2}x^4+x^4\varepsilon_1(x)$$
$$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon_2(x)$$
$$f(x)=\left(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+x^4\varepsilon_1(x)\right)\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon_2(x)\right)$$
$$=1-x+\left(\frac{1}{2}+1\right)x^2+\left(-\frac{1}{6}-1\right)x^3+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x^4+x^4\varepsilon(x)$$
$$f(x)=1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{6}x^3+\frac{25}{24}x^4+x^4\varepsilon(x).$$

3.

$$f(x)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}(-x+x^2)\right)=\ln 2+\ln(1+u)$$

avec $u=\dfrac{-x+x^2}{2}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}x^2$

$$f(x)=\ln 2+u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+u^3\varepsilon_1(u),$$

or, $u^2=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x^3+x^3\varepsilon_2(x)$ et $-\dfrac{1}{2}u^2=-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{4}x^3+x^3\varepsilon_3(x)$

et $u^3=u^2u=-\dfrac{1}{8}x^3+x^3\varepsilon_4(x)$ donc $\dfrac{1}{3}u^3=-\dfrac{1}{24}x^3+x^3\varepsilon_5(x)$ donc

$$f(x)=\ln 2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2\right)+\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x^3\right)+\left(-\frac{1}{24}x^3\right)+x^3\varepsilon(x)$$
$$=\ln 2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)x^2+\left(+\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)x^3+x^3\varepsilon(x)$$
$$f(x)=\ln 2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{24}x^3+x^3\varepsilon(x).$$

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= (8-x)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 4\left(1+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{x}{8}\right)+\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)}{2}\left(-\frac{x}{8}\right)^2+\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)}{6}\left(-\frac{x}{8}\right)^3+x^3\varepsilon_1(x)\right) \\ &= 4\left(1-\frac{1}{12}x-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{64}x^2-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{512}x^3+x^3\varepsilon_1(x)\right) \\ &= 4-\frac{1}{3}x-\frac{1}{144}x^2-\frac{1}{2592}x^3+x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Exercice 1.14.

1. On pose $x=\frac{1}{h}$ pour se ramener en 0. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+3x} = \sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{3}{h}} = \frac{1}{|h|}(1+3h)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{|h|}\left(1+\frac{1}{2}(3h)-\frac{1}{8}(3h)^2+h^2\varepsilon_1(h)\right) \\ &= |x|\left(1+\frac{3}{2}\frac{1}{x}-\frac{9}{8}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_2(x)\right) \quad \text{avec } \lim_{|x|\to\infty}\varepsilon_2(x)=0. \end{aligned}$$

On sépare maintenant l'étude en deux sous-cas, selon que x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$:

Si $x\to+\infty$ $(x>0)$

$$f(x)=x+\frac{3}{2}-\frac{9}{8}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty}\varepsilon_2(x)=0.$$

Conclusion : la courbe de f admet la droite $y=x+\frac{3}{2}$ comme asymptote oblique, au voisinage de $+\infty$ et elle est au-dessous de l'asymptote pour $x\to+\infty$.

Si $x\to-\infty$ $(x<0)$

$$f(x)=-x-\frac{3}{2}+\frac{9}{8}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to-\infty}\varepsilon_2(x)=0.$$

Conclusion : la courbe de f admet la droite $y=-x-\frac{3}{2}$ comme asymptote oblique, au voisinage de $-\infty$ et elle est au-dessous de l'asymptote pour $x\to-\infty$ (car $\frac{9}{8}\frac{1}{x}<0$ pour $x<0$).

2. Même démarche.

$$\begin{aligned} f(x) &= x\exp\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{h}e^{h-h^2} \\ &= \frac{1}{h}\left(1+(h-h^2)+\frac{1}{2}(h-h^2)^2+(h-h^2)^2\varepsilon(h-h^2)\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(1+h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_1(h)\right) \\ &= x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_2(x)\right) \quad \text{avec } \lim_{|x|\to\infty}\varepsilon_2(x)=0 \\ &= x+1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{|x|\to\infty}\varepsilon(x)=0. \end{aligned}$$

Conclusion : la courbe de f admet la droite $y=x+1$ comme asymptote oblique, au voisinage de $\pm\infty$, et elle est au-dessus de l'asymptote pour $x\to-\infty$, au-dessous pour $x\to+\infty$.

Exercice 1.15.

1. Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-e^x}{x^2}$; on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+3x} &= (1+3x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}(3x)-\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}(3x)^2+x^2\varepsilon_1(x) \\ &= 1+x-x^2+x^2\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

et $e^x = 1+x+\dfrac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon_2(x)$ de sorte que

$$f(x)=\frac{(1+x-x^2+x^2\varepsilon_1(x))-(1+x+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon_2(x))}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{-\frac{3}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)}{x^2}=-\frac{3}{2}+\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to0]{}-\frac{3}{2}.$$

2. Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-\sqrt{4-\frac{x}{3}}}{x^2}$; on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8-x} &= 2\left(1-\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left(1-\frac{1}{3}\frac{x}{8}-\frac{1}{9}\left(\frac{x}{8}\right)^2\right)+x^2\varepsilon_1(x) \\ &= 2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{288}x^2+x^2\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{4-\frac{x}{3}} &= 2\left(1-\frac{x}{12}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{12}-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{12}\right)^2\right)+x^2\varepsilon_2(x) \\ &= 2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{576}x^2+x^2\varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

donc finalement

$$f(x)=\frac{\left(2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{288}x^2+x^2\varepsilon_1(x)\right)-\left(2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{576}x^2+x^2\varepsilon_2(x)\right)}{x^2}$$
$$=\frac{-\frac{1}{576}x^2+x^2\varepsilon(x)}{x^2}=-\frac{1}{576}+\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to0]{}-\frac{1}{576}.$$

3. Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-2x^2}-\cos x}{x^2}$; on a :

$$\sqrt{1-2x^2}=1+\frac{1}{2}(-2x^2)+x^2\varepsilon_1(x)=1-x^2+x^2\varepsilon_1(x)$$

et

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon_2(x)$$

donc

$$f(x)=\frac{(1-x^2+x^2\varepsilon_1(x))-\left(1-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon_2(x)\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to0]{}-\frac{1}{2}.$$

4. Soit $f(x)=\dfrac{2\ln\cos 2x+\sin^2 2x}{x^4}$. En raisonnant comme dans l'exemple traité en cours, on a $\ln\cos 2x=\ln(1+(\cos 2x-1))=\ln(1+u)$ avec $u=\cos 2x-1\to 0$ pour $x\to 0$. On peut donc composer les d.l. ; on a bien sûr besoin de d.l. à l'ordre 4.
On a $u=\cos(2x)-1=1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4+x^4\varepsilon_1(x)-1=-2x^2+\frac{2}{3}x^4+x^4\varepsilon(x)$;
comme $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+u^2\varepsilon_2(u)$, on calcule $u^2=4x^4+x^4\varepsilon_3(x)$, et $-\frac{1}{2}u^2=-2x^4+\varepsilon_4(x)$, de sorte que
$\ln\cos 2x=-2x^2+\frac{2}{3}x^4-2x^4+x^4\varepsilon_5(x)=-2x^2-\frac{4}{3}x^4+x^4\varepsilon_5(x)$.
D'autre part, on sait que $\sin 2x=2x-\frac{1}{6}(2x)^3+x^4\varepsilon_6(x)=2x-\frac{4}{3}x^3$ donc
$\sin^2 2x=4x^2-2\times2\times\frac{4}{3}x^4+x^4\varepsilon_7(x)=4x^2-\frac{16}{3}x^4+x^4\varepsilon_7(x)$.
On a donc finalement

$$f(x)=\frac{2\left(-2x^2-\frac{4}{3}x^4+x^4\varepsilon_5(x)\right)+\left(4x^2-\frac{16}{3}x^4+x^4\varepsilon_7(x)\right)}{x^4}$$
$$f(x)=-\tfrac{8}{3}-\tfrac{16}{3}+\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to0]{}-8.$$

5. Soit $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ et $g(x)=\ln(f(x))=\dfrac{1}{x^2}\ln\cos x$.
On utilise le d.l.$_0(2)$ de $\ln(\cos x)$ que l'on a vu p.28 :
$\ln(\cos x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$ donc $g(x)=-\dfrac{1}{2}+\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to0]{}-\dfrac{1}{2}$ et

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{g(x)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

6. On se ramène en 0 en utilisant le changement de variable $h=\dfrac{1}{x}$ ou $x=\dfrac{1}{h}$.

Si $f(x)=x^2\left[\exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right]$, on a $f(x)=\frac{1}{h^2}\left[\exp(h-h^2)-\sqrt{1+2h}\right]$. On utilise alors un d.l.$_0(2)$ des fonctions rencontrées : $e^u=1+u+\frac{1}{2}u^2+u^2\varepsilon_1(u)$. Pour $u=h-h^2$, on a $u^2=h^2+h^2\varepsilon_2(h)$ et donc

$\exp(h-h^2)=e^u=1+(h-h^2)+\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_3(h)=1+h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_3(h)$. D'autre part, on a : $\sqrt{1+2h}=1+\frac{1}{2}(2h)-\frac{1}{8}(2h)^2+h^2\varepsilon_4(h)=1+h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_4(h)$ donc finalement

$$f(x)=\frac{1}{h^2}\left[(1+h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_3(h))-(1+h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_4(h))\right]$$

$$f(x)=\frac{h^2\varepsilon_3(h)-h^2\varepsilon_4(h)}{h^2}=\varepsilon(h)\xrightarrow[\substack{h\to 0\\ x\to+\infty}]{}0.$$

7. Soit $f(x)=\left(1-\frac{3}{2x}\right)^x$ et $g(x)=\ln(f(x))=x\ln\left(1-\frac{3}{2x}\right)$. On utilise ici aussi le changement de variable $x=\frac{1}{h}$ qui nous ramène en 0.

On a $g(x)=\frac{1}{h}\ln\left(1-\frac{3}{2}h\right)$ et un d.l.$_0(1)$ de cette fonction nous donne le résultat : $g(x)=\frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2}h+h\varepsilon(h)\right)=-\frac{3}{2}+\varepsilon(h)\xrightarrow[\substack{h\to 0\\ x\to+\infty}]{}-\frac{3}{2}$ de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{g(x)}=e^{-\frac{3}{2}}$.

8. Ne pas toujours se précipiter sur les d.l. ! Ici, ça n'aurait aucun intérêt.

Comme $\frac{x}{x-1}$ est négatif entre 0 et 1, la limite qu'on étudie est forcément en 0–, et on peut écrire :

$f(x)=x-x^2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=x-x^2\ln\left(\frac{-x}{1-x}\right)x-x^2\ln(-x)+x^2\ln(1-x)$ et la seule forme indéterminée $x^2\ln(-x)$ en 0– est « de référence » (ou presque : il suffit de se ramener en 0+ en posant $y=-x$) : on a $\lim\limits_{x\to 0-}x^2\ln(-x)=0$ de sorte que clairement, $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0$.

Exercice 1.16. L'ensemble de définition de cette fonction est $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$, l'ensemble de continuité est le même, et l'ensemble de dérivabilité est $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ car la fonction $x\longmapsto\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 ; de plus, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}e^{\frac{1}{x+1}}\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}e^{\frac{1}{x+1}}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=+\infty.$$

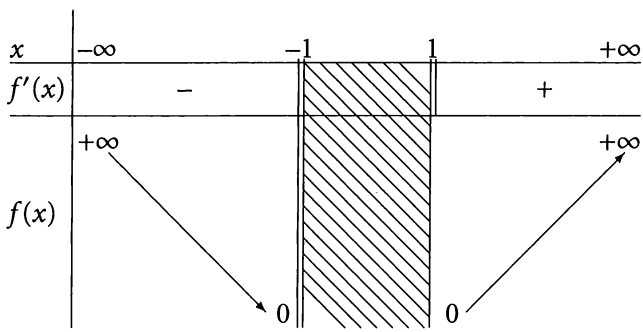
$f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=e^{\frac{1}{x+1}}=e^{w(x)}$ $(w(x)=\frac{1}{x+1})$ et $v(x)=\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\alpha(x)}$ $(\alpha(x)=x^2-1)$.

$u'(x)=w'(x)e^{w(x)}=-\frac{1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}$ et $v'(x)=\frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, de sorte que

finalement, puisque $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}\sqrt{x^2-1} + e^{\frac{1}{x+1}}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2\sqrt{x^2-1}}(-(x^2-1)+(x+1)^2x) \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2\sqrt{x^2-1}}(x+1)((1-x)+x^2+x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}(x^2+1) \end{aligned}$$

$f'(x)$ est clairement du signe de $(x+1)$ et on peut dresser le tableau de variation



On détermine les limites : la seule à ne pas être évidente est peut-être celle en -1 par valeurs inférieures, mais on peut remarquer qu'il n'y a en fait aucune indétermination, puisque $\frac{1}{x+1} \to -\infty$ pour $\substack{x\to -1\\ x<-1}$.

Restent à étudier les branches infinies : pour cela, on fait un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$. On se ramène en 0 en posant $h = \frac{1}{x+1}$, et donc $x+1 = \frac{1}{h}$ et $x = \frac{1}{h} - 1$, de sorte que $x^2 - 1 = \frac{1}{h}(\frac{1}{h} - 2)$. On a donc

$$f(x) = e^h\sqrt{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}-2\right)} = \frac{e^h}{|h|}\sqrt{1-2h}.$$

On a $e^h = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon_1(h)$ et

$$\sqrt{1-2h} = (1-2h)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(2h) - \frac{1}{8}(-2h)^2 + h^2\varepsilon_2(h) = 1 - h - \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon_2(h).$$

De sorte que :

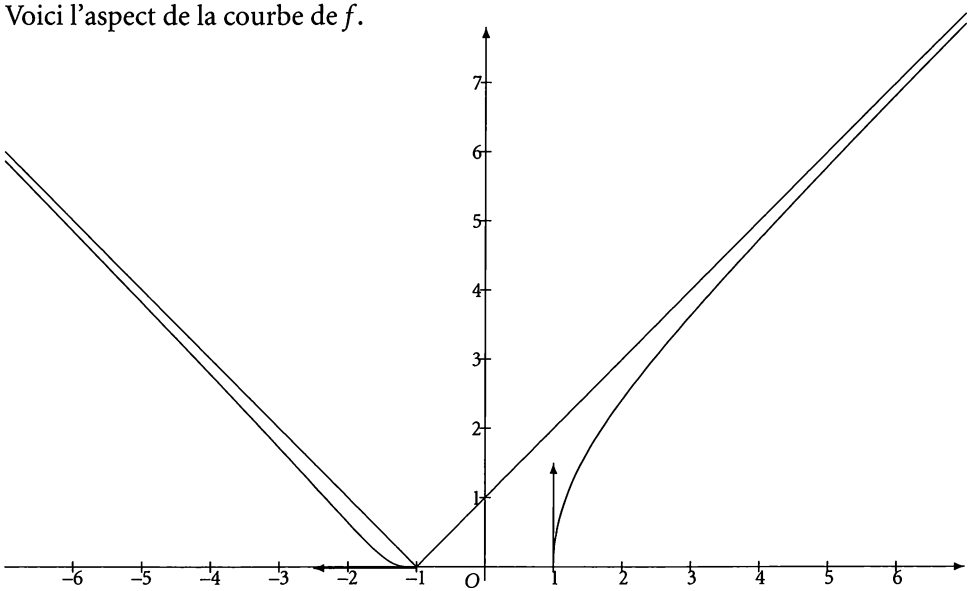
$$f(x) = \frac{1}{|h|}(1+h+\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_1(h))(1-h-\frac{1}{2}h^2+h^2\varepsilon_2(h)) = \frac{1}{|h|}(1-h^2+h^2\varepsilon_3(h)).$$

Donc, pour $x \to +\infty$, et donc $h > 0$, on peut écrire

$f(x) = \frac{1}{h} - h + h\varepsilon_3(h) = (x+1) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$, donc la courbe de f admet, au voisinage de $+\infty$, la droite d'équation $y = x+1$ comme asymptote oblique et elle est au-dessous de cette asymptote (car $-\frac{1}{x+1} < 0$).

En revanche, pour $x \to \infty$, et donc $h < 0$, on a

$f(x) = -x-1+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}\varepsilon^*(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon^*(x)=0$ et donc la courbe de f admet, au voisinage de $-\infty$, la droite d'équation $y=-x-1$ comme asymptote oblique et elle est au-dessous de cette asymptote (car $\frac{1}{x+1}<0$).
Avant de tracer la courbe, il reste un point intéressant à étudier, c'est l'aspect de la courbe au voisinage des points limites, d'abscisse -1 et 1.
En 1, on a vu que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$, donc la courbe admet en ce point une demi-tangente verticale, tournée vers le haut.
En -1, on peut étudier $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{f(x)-0}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-1-x}}$. On peut poser $X=\frac{1}{-1-x}$, et on a $X\to+\infty$, et comme $-\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}}{\sqrt{-1-x}}=\dfrac{X^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^X}$, on peut conclure que cette limite est nulle, donc la courbe de f admet une tangente horizontale en son point limite pour $x=-1$.
Voici l'aspect de la courbe de f.



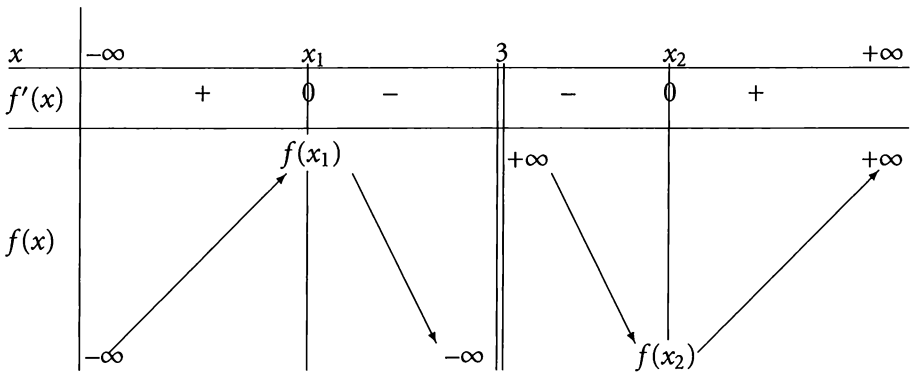
CHAPITRE 2

2. Solutions des exercices sur les études de fonctions

Exercice 2.1. $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x-3}$.
f est une fonction rationnelle, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, et sans problème de continuité ou de dérivabilité sur cet ensemble.

$$f'(x)=\frac{(2x)(x-3)-(x^2+9)1}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x-9}{(x-3)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe du trinôme x^2-6x-9, dont le discriminant vaut $\Delta = 72$, et dont les racines sont $x_1 = 3-3\sqrt{2} \simeq -1{,}242\,640\,686$ et $x_2 = 3+3\sqrt{2} \simeq 7{,}242\,640\,686$; $f'(x) > 0$ pour x à l'extérieur de ces racines.
On peut dresser le tableau de variation



Les limites apparaissant dans ce tableau de variations sont à peu près évidentes ; des valeurs approchées de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont $f(x_1) \simeq -2{,}485\,281\,376$ et $f(x_2) \simeq 14{,}485\,281\,38$.
Il reste à étudier les branches infinies.
On détermine aisément

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+9}{x^2-3x} = 1, \end{aligned}$$

et ensuite :

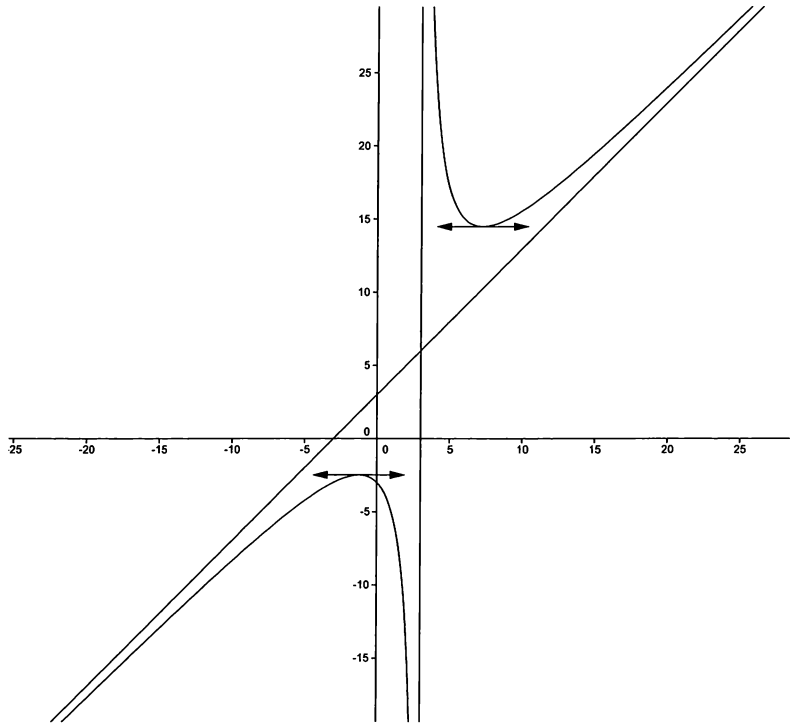
$$\begin{aligned} f(x)-ax &= f(x)-x \\ &= \frac{x^2+9}{x-3} - \frac{x^2-3x}{x-3} \\ &= \frac{3x+9}{x-3} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} b \\ &= 3. \end{aligned}$$

La droite d'équation $y = x+3$ est donc asymptote oblique à la courbe.
Pour déterminer la position relative de la courbe par rapport à son asymptote, on calcule :

$$\Delta(x) = f(x)-(ax+b) = f(x)-(x+3) = \frac{x^2+9}{x-3} - \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{18}{x-3};$$

$\Delta(x)$ est du signe de $x-3$, donc la courbe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.

Voici l'aspect de la courbe de f :



Exercice 2.2. $f(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

f est une fonction fraction rationnelle, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc dérivable sur cet ensemble.

On a $f'(x) = \dfrac{(4x-1)(x-1)-(2x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-4x}{(x-1)^2} = 2\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $x(x-2)$, donc positive à l'extérieur de $[0,2]$.

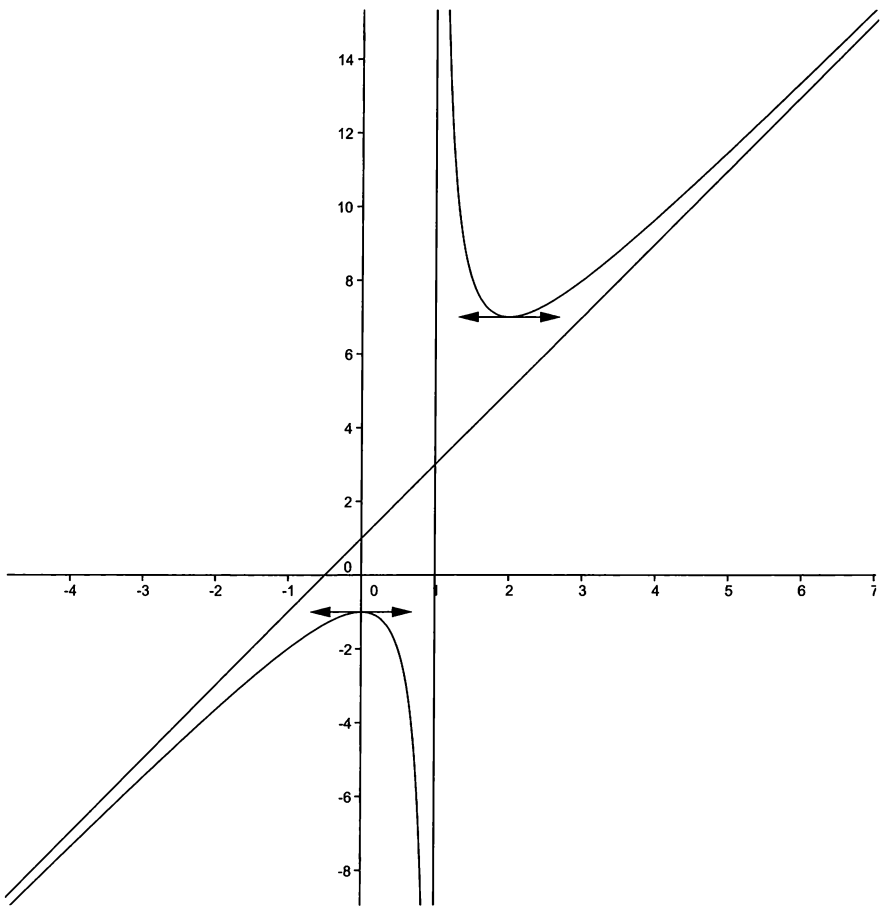
Voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

Les limites sont à peu près évidentes.

Il reste à étudier les branches infinies. On peut utiliser une méthode comme celle de l'exercice 2.1, mais il est plus rapide de « bricoler » sur l'expression de $f(x)$:

$f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=\dfrac{2(x^2-x)+x+1}{x-1}=2x+\dfrac{x-1+2}{x-1}=2x+1+\dfrac{2}{x-1}$;
Sous cette forme, il est évident que la droite d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique à la courbe de f, et de plus comme $\Delta(x)=f(x)-(2x+1)=\dfrac{2}{x-1}$ est du signe de $x-1$, la courbe de f est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$, en dessous au voisinage de $-\infty$.
Voici l'aspect de la courbe de f (le repère n'est pas orthonormal).



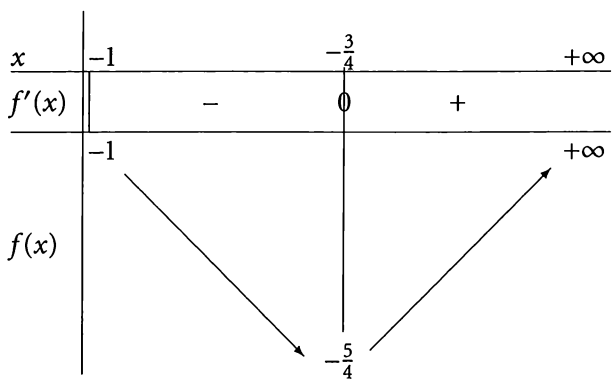
Exercice 2.3. $f(x)=x-\sqrt{x+1}$
$f(x)$ existe pour $x\geqslant -1$, donc l'ensemble de définition est $[-1,+\infty[$; f est dérivable pour tous les x qui n'annulent pas la quantité sous le radical ; on est sûr que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$, et on a
$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$; pour étudier les signe de cette quantité, une méthode efficace est d'utiliser la technique de la quantité conjuguée :

$f'(x) = \dfrac{(2\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{2\sqrt{x+1}\left(2\sqrt{x+1}+1\right)} = \dfrac{4x+3}{2\sqrt{x+1}\left(2\sqrt{x+1}+1\right)}$;

Sous cette forme, comme le dénominateur est clairement strictement positif pour $x > -1$, on voit que $f'(x)$ est du signe de $4x+3$, donc positive pour $x > -\frac{3}{4}$;

D'autre part, sous la forme $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, il est clair que $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f'(x) = -\infty$, donc en vertu du théorème 2.1 p.45, on a aussi $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite en -1, et la courbe de f admet en son point d'abscisse -1 une demi-tangente verticale tournée vers le bas.

Voici le tableau de variation de f :



La limite à l'infini est un tout petit peu délicate (on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ »).

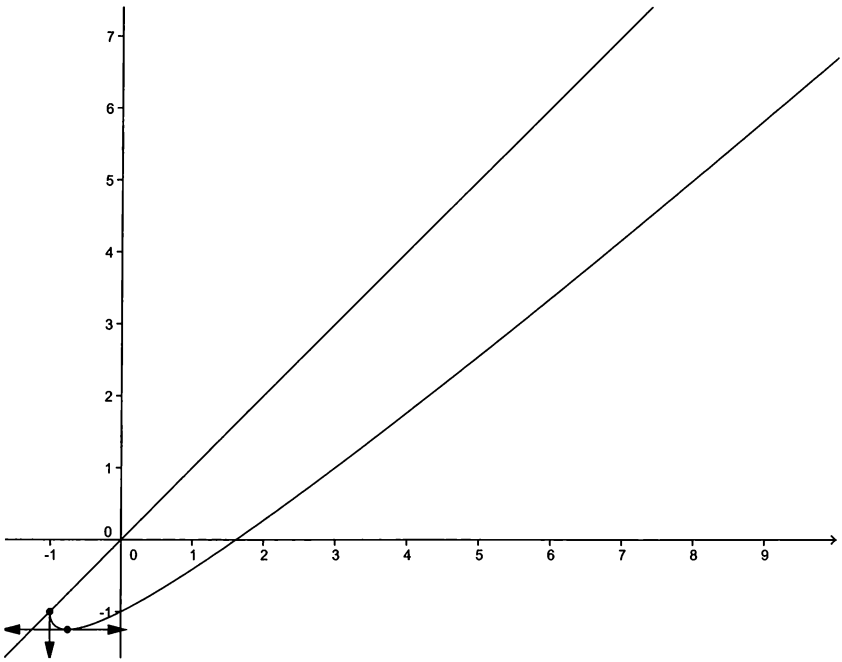
On a, pour $x > 0$, $f(x) = x - \sqrt{x+1} = x - \sqrt{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)$, et sous cette forme, il n'y a plus d'indétermination, on voit bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (Ici, la technique de quantité conjuguée ne donnait pas le résultat de façon simple).

Reste à étudier la branche infinie :

On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x-\sqrt{x+1}}{x} = 1 - \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = 1 - \dfrac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = 1 - \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$ et sous cette forme, il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; la courbe de f admet donc une direction asymptotique, qui est celle de la droite $y = x$.

Mais $f(x) - x = -\sqrt{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, donc il n'y a pas d'asymptote oblique, seulement une branche parabolique, dont la direction asymptotique est celle de la droite $y = x$; on peut ajouter que cette branche parabolique est en dessous de la direction asymptotique.

Voici l'aspect de la courbe de f.



Exercice 2.4. $f(x) = (2x+1)\,e^{x+1} + x - 3$.

1. Il n'y a aucun problème de définition dans l'expression définissant $f(x)$, d'où le résultat.

2. En $-\infty$

   Il est facile de vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$ (puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$; il suffit d'écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = 2exe^x + ee^x + x - 3$).

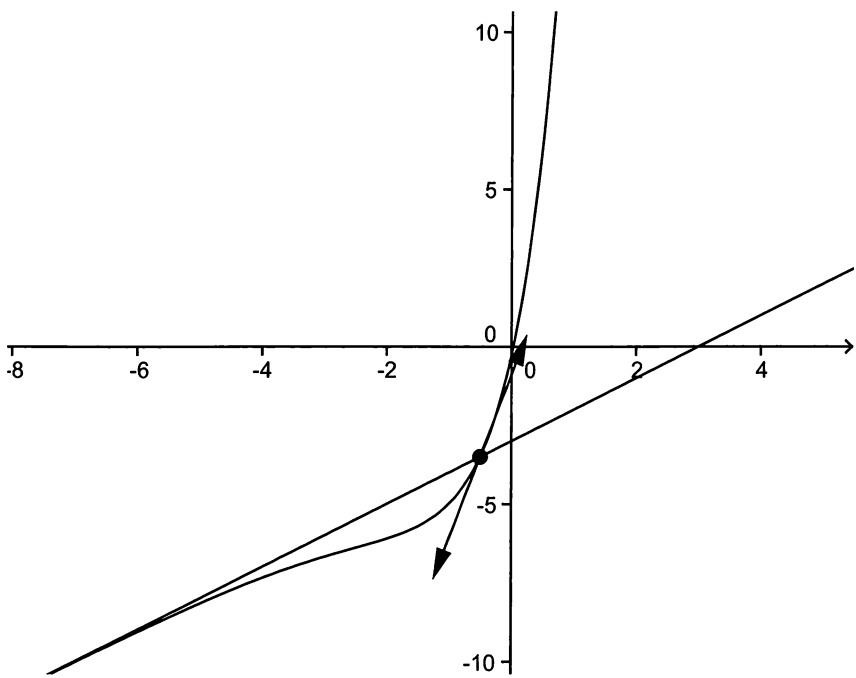
   De plus, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)e^{x+1} = 0$ (même raisonnement, en écrivant $f(x) = x - 3 + (2x+1)e^{x+1}$, sous cette forme, il est évident que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x - 3$ comme asymptote oblique au voisinage de $-\infty$; comme $(2x+1)e^{x+1} < 0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est au-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

   En $+\infty$:

   Il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (il n'y a aucune indétermination).

   On étudie alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$: on a $\dfrac{f(x)}{x} = \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)e^{x+1} + 1 - \dfrac{3}{x}$; sous cette forme, il est évident que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, donc la courbe de f admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique verticale.

3. On a $f'(x) = 2e^{x+1} + (2x+1)e^{x+1} + 1 = (2x+3)e^{x+1} + 1$.
   $f''(x) = 2e^{x+1} + (2x+3)e^{x+1} = (2x+5)e^{x+1}$; $f''(x)$ est du signe de $(2x+5)$ et s'annule pour $x = -\frac{5}{2}$, et on a $f'(-\frac{5}{2}) = -2e^{-\frac{3}{2}} + 1 \simeq 0{,}553\,739\,679\,8 > 0$; un tableau de variation sommaire montre que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (On peut dresser un tableau de variation, mais ce n'est pas indispensable, lorsque la variation est aussi simple !)
4. Il suffit d'étudier la quantité
   $\Delta(x) = f(x) - (x-3) = (2x+1)e^{x+1}$ (dont on avait étudié le signe pour déterminer la position relative de la courbe et de l'asymptote oblique). Il est clair que $\Delta(x)$ s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$; on a $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$, donc le point d'intersection recherché a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$; pour un tracé plus précis, on peut déterminer le coefficient directeur de la tangente en ce point : $f'(-\frac{1}{2}) = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 \simeq 4{,}297\,442\,542$.
5. Voici l'aspect de la courbe de f.

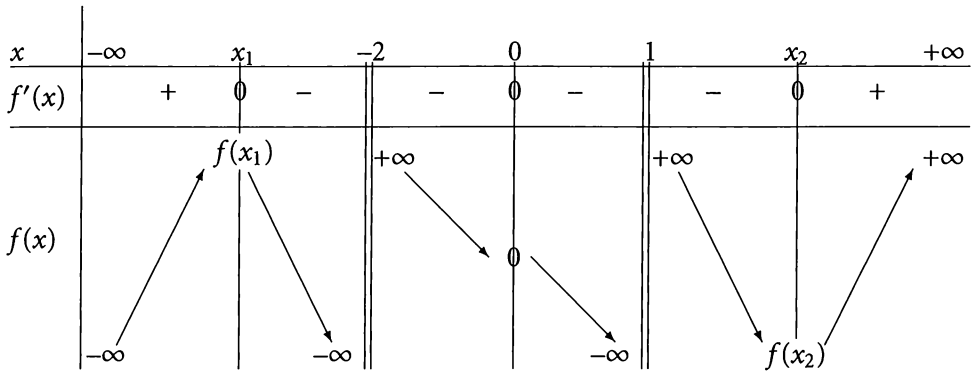


Exercice 2.5. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x-2}$.
f est une fonction fraction rationnelle, définie pour les x qui n'annulent pas le dénominateur. Or, $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1,-2\}$ et f est dérivable sur cet ensemble. On a

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+x-2) - (x^3)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{x^4+2x^3-6x^2}{(x^2+x-2)^2} = \frac{x^2(x^2+2x-6)}{(x-1)^2(x+2)^2}.$$

$f'(x)$ s'annule pour $x = 0$ et aussi pour $x = x_1$ ou $x = x_2$, x_1, x_2 étant les racines du trinôme x^2+2x-6 ; on trouve $x_1 = -1 - \sqrt{7} \simeq -3{,}645\,751\,311$ et $x_2 = -1 + \sqrt{7} \simeq 1{,}645\,751\,311$.

$f'(x)$ est du signe du trinôme x^2+2x-6, donc positif à l'extérieur de $[x_1,x_2]$.
Voici le tableau de variation de f :



Les limites apparaissant dans ce tableau de variations sont à peu près évidentes ; des valeurs approchées de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont $f(x_1)\simeq -6{,}337\,835\,371$ et $f(x_2)\simeq 1{,}893\,390\,928$.

On détermine aisément $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2+x-2)}=1$, et ensuite :

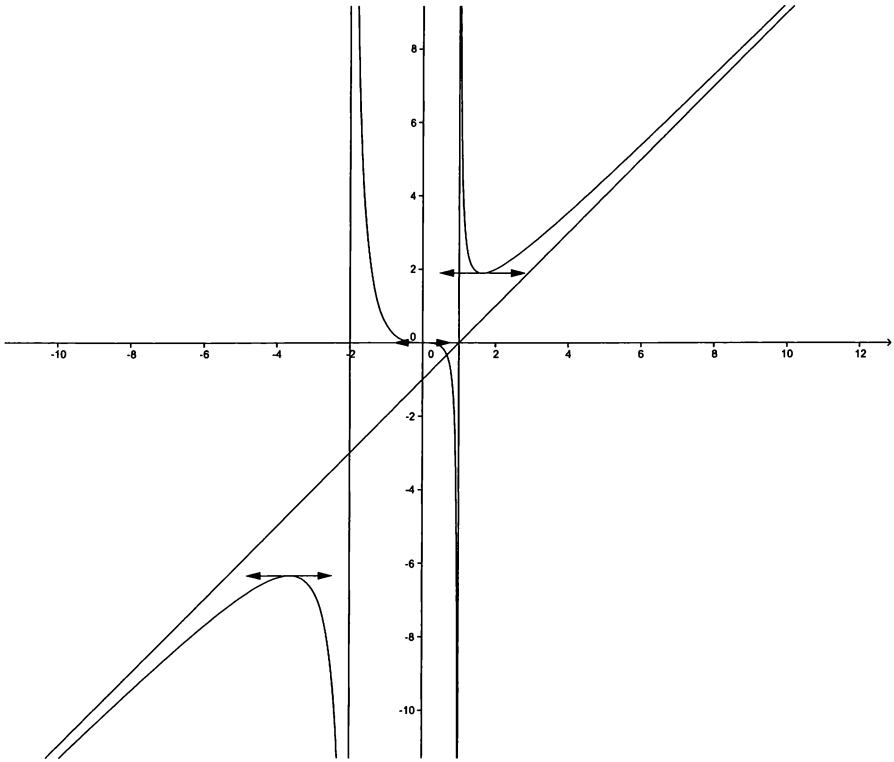
$$\begin{aligned} f(x)-ax &= f(x)-x \\ &= \frac{x^3}{x^2+x-2}-\frac{x^3+x^2-2x}{x^2+x-2} \\ &= \frac{-x^2+2x}{x^2+x-2} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} b \\ &= -1. \end{aligned}$$

La droite d'équation $y=x-1$ est donc asymptote oblique à la courbe.
Pour déterminer la position relative de la courbe par rapport à son asymptote, on calcule :

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= f(x)-(ax+b) \\ &= f(x)-x+1 \\ &= \frac{-x^2+2x}{x^2+x-2}+\frac{x^2+x-2}{x^2+x-2} \\ &= \frac{3x-2}{x^2+x-2}; \end{aligned}$$

$\Delta(x)$ est du signe de $(3x-2)(x-1)(x+2)$, positif pour $x\to+\infty$ et négatif pour $x\to-\infty$, donc la courbe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.

Voici l'aspect de la courbe de f :



Exercice 2.6. $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

Cette fonction est définie pour les x qui sont tels que $x^2+2x-3 \geqslant 0$; or, ce trinôme s'annule pour $x = 1$ et $x = -3$, et est positif à l'extérieur des racines, donc l'ensemble de définition est $\mathscr{D}_f =]-\infty,-3\,] \cup [\,1,+\infty[$. On est sûr de la continuité de f dans cet ensemble mais pas de la dérivabilité, puisque la fonction racine carrée ($x \longmapsto \sqrt{x}$) n'est pas dérivable en 0 : on ne sait pas encore si f est dérivable pour les valeurs qui annulent la quantité sous le radical, donc en -3 et en 1 ; en revanche, on est sûr que f est dérivable sur l'ensemble de définition privé de ces deux valeurs, c'est-à-dire sur $]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$, et on a, sur cet ensemble :

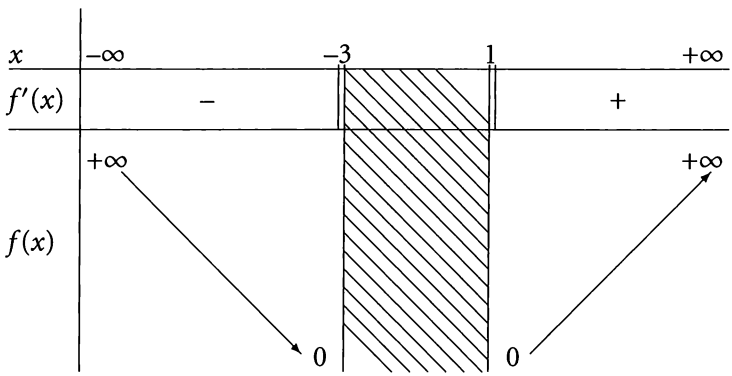
$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

$f'(x)$ est du signe de $x+1$.

Mais d'autre part, on voit clairement (puisque le dénominateur tend vers 0+), que $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f'(x) = +\infty$, donc, grâce au théorème 2.1 p.45 on a aussi $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$, ce qui prouve que f n'est pas dérivable (à gauche) en -3 et

que f n'est pas dérivable (à droite) en 1. On peut de plus affirmer que la courbe de f admet, à gauche de -3, une demi-tangente verticale tournée *vers le haut* et à droite de 1, une demi-tangente verticale tournée également vers le haut.

On peut maintenant dresser le tableau de variation de f :



Les limites sont évidentes. Restent à étudier les branches infinies.

On étudie tout d'abord $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x} = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}$;

Sous cette forme, il est évident que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

Du coup, on calcule la limite, pour $x \to +\infty$ de $f(x)-x$; la technique de la quantité conjuguée donne toujours de bons résultats dans des situations de ce genre (forme indéterminée « $\infty-\infty$ », avec des radicaux) :

$$f(x)-x = \sqrt{x^2+2x-3}-x = \frac{(x^2+2x-3)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}+x}$$
$$= \frac{2x-3}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}+x} = \frac{2x-3}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+x}$$

mais $|x| = x$, puisque $x \to +\infty$

$$f(x)-x = \frac{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+1\right)} = \frac{2-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+1}.$$

Sous cette forme, il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \dfrac{2-0}{\sqrt{1+0-0}+1} = 1$, donc la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

De la même manière, on étudie la limite, pour $x \to -\infty$, de $f(x)-(-1)x = f(x)+x$ (puisque $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$). Notons qu'on a encore affaire à une forme indéterminée « $\infty-\infty$ ».

$$f(x)+x = \sqrt{x^2+2x-3}+x = \frac{(x^2+2x-3)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}-x} = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}-x}$$
$$= \frac{2x-3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}-x} = \frac{2x-3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-x}$$

mais $|x| = -x$, puisque $x \to -\infty$

$$f(x)+x = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1\right)} = \frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}.$$

Sous cette forme, il est clair que $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \frac{-2+0}{\sqrt{1+0-0}+1} = -1$, donc la droite d'équation $y = -x-1$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
Il reste à étudier la position relative de la courbe de f et de ses asymptotes obliques, ce qui se fait en étudiant le signe de $\Delta_1(x) = f(x)-(x+1)$ au voisinage de $+\infty$ et le signe de $\Delta_2(x) = f(x)-(-x-1)$ au voisinage de $-\infty$; ici encore, c'est la technique de la quantité conjuguée qui permet de résoudre la difficulté.

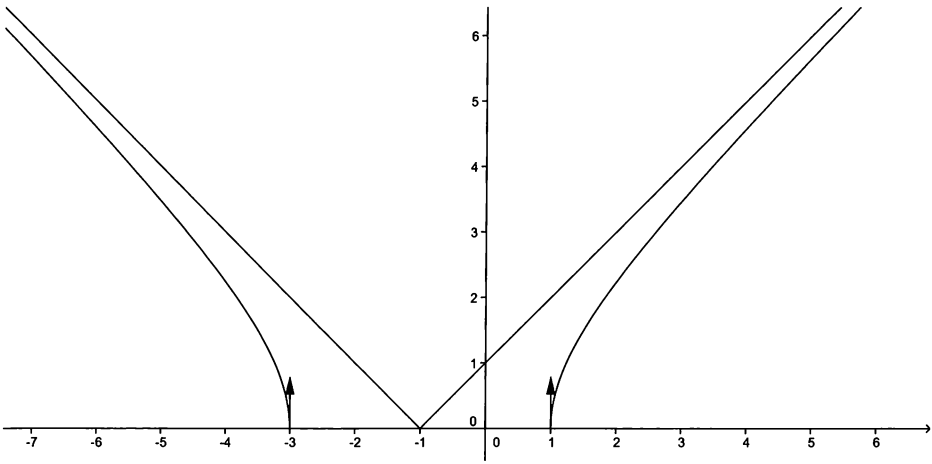
$$\Delta_1(x) = f(x)-(x+1) = \sqrt{x^2+2x-3}-(x+1) = \frac{(x^2+2x-3)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+(x+1)}$$
$$= \frac{(x^2+2x-3)-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+2x-3}+(x+1)} = \frac{-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+(x+1)}.$$

Sous cette forme, il est clair que le dénominateur est positif (en tout cas pour $x \geqslant 1$), donc $\Delta_1(x) < 0$ au voisinage de $+\infty$, et la courbe est donc en dessous de l'asymptote.
De même,

$$\Delta_2(x) = f(x)-(-x-1) = \sqrt{x^2+2x-3}+(x+1) = \frac{(x^2+2x-3)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-3}-(x+1)}$$
$$= \frac{(x^2+2x-3)-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+2x-3}+(-x-1)} = \frac{-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+(-x-1)}.$$

Sous cette forme, au voisinage de $-\infty$, on a $-x-1 > 0$, donc le dénominateur est positif, et on a donc $\Delta_2(x) < 0$, donc la courbe est aussi en dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

Voici l'aspect de la courbe de f :



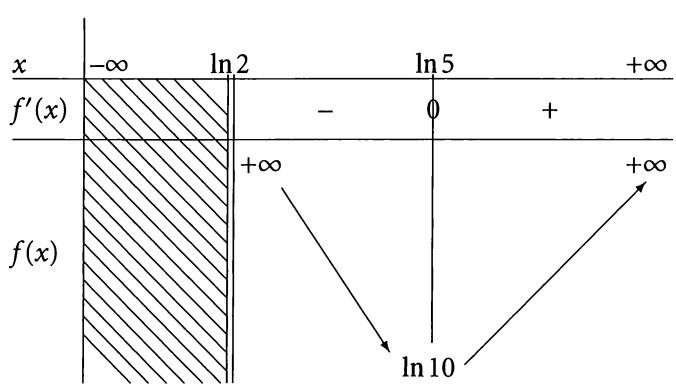
Exercice 2.7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right)$.

Pour que $f(x)$ existe, il faut (et il suffit) que la quantité du dénominateur soit non nulle (donc $x \neq \ln 2$) *et* que la quantité dont on prend le logarithme soit strictement positive. Or, on a $e^{2x}+5>0$, donc il faut et il suffit que le dénominateur e^x-2 soit >0, c'est-à-dire $x>\ln 2$. Finalement, l'ensemble de définition (et aussi de dérivabilité) de f est $]\ln 2, +\infty[$.

Posons $g(x) = \dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}$; dans l'ensemble de définition, on a $g(x)>0$; d'autre part, on a $f(x) = \ln(g(x))$, donc $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$; comme $g(x)>0$, $f'(x)$ est du signe de $g'(x)$, et on a :

$g'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^x-2)-(e^{2x}+5)e^x}{(e^x-2)^2} = \dfrac{e^{3x}-4e^{2x}-5e^x}{(e^x-2)^2}$; $f'(x)$ est donc du signe de $e^x(e^{2x}-4e^x-5) = e^x((e^x)^2-4e^x-5)$ donc du signe de $(e^x)^2-4e^x-5$, qui est un trinôme en e^x ; on factorise aisément $X^2-4X-5 = (X+1)(X-5)$, donc $(e^x)^2-4e^x-5 = (e^x+1)(e^x-5)$, et $f'(x)$ est donc du signe de e^x-5, c'est-à-dire positive pour $x>\ln 5$.

Voici le tableau de variation de f :



On a calculé $f(\ln 5) = \ln\left(\dfrac{e^{2\ln 5}+5}{e^{\ln 5}-2}\right) = \ln\left(\dfrac{5^2+5}{5-2}\right) = \ln 10$

Les limites sont assez faciles à traiter : en $+\infty$, on factorise e^{2x} au numérateur et e^x au dénominateur de $\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}$:

$f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right) = \ln\left(e^x \dfrac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}}\right) = x + \ln\left(\dfrac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}}\right)$, et sous cette forme, comme $\ln 1 = 0$, il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Et en $\ln 2+$, il est clair que le dénominateur de cette fraction tend vers $0+$, donc le quotient tend vers $+\infty$, et prendre le logarithme ne change rien.

Il reste à étudier la branche infinie en $+\infty$ (on a une asymptote verticale en $\ln 2$).

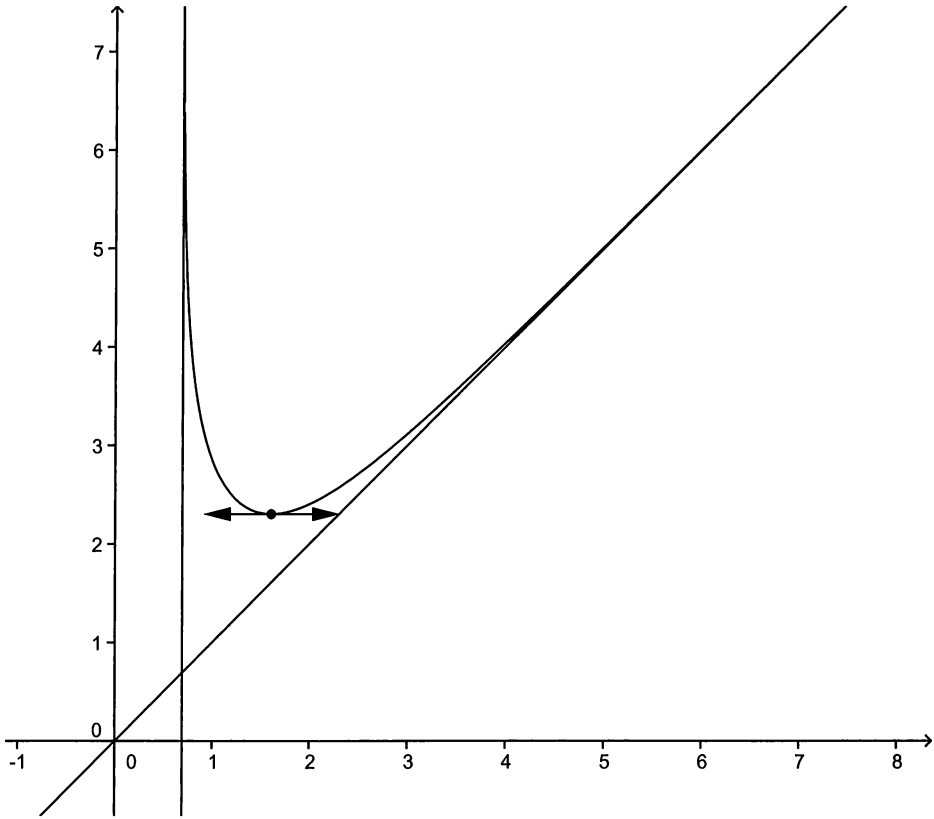
La forme qu'on a obtenue pour la limite de f en $+\infty$ donne directement le résultat :

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}}\right),$$

en effet, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}}\right) = \ln 1 = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f.

De plus, on voit que $\Delta(x) = f(x) - x = \ln\left(\dfrac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}}\right) > 0$ puisque $\dfrac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}} > 1$ ($1+5e^{-2x} > 1$ et $0 < 1-2e^{-x} < 1$ donc $\dfrac{1}{1-2e^{-x}} > 1$), donc la courbe de f est au-dessus de son asymptote.

Voici l'aspect de la courbe de f :



Exercice 2.8. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$

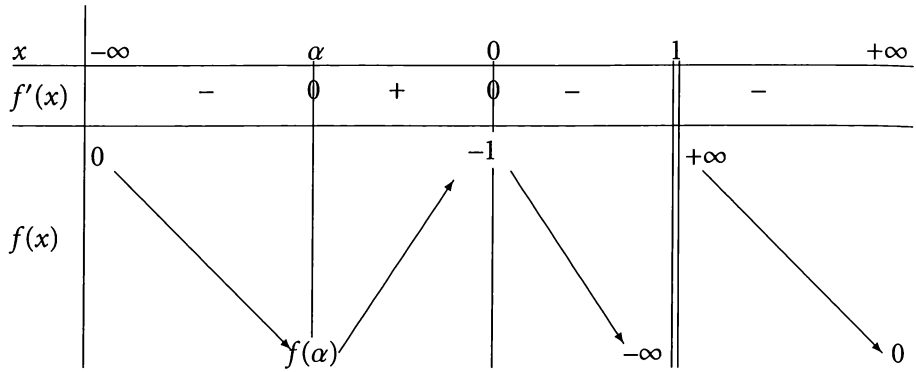
1. Le seul problème de définition concerne le dénominateur de f, qui ne s'annule que pour $x = 1$, donc l'ensemble de définition (et de dérivabilité) est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. $f'(x) = \dfrac{2x(x^3-1)-(x^2+1)(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \dfrac{-x^4-3x^2-2x}{(x^3-1)^2} = \dfrac{-x(x^3+3x+2)}{(x^3-1)^2} = \dfrac{-x}{(x^3-1)^2}\, g(x)$
avec $g(x) = x^3+3x+2$.

3. g est définie sur $\mathbb{R}$, et on a $g'(x) = 3x^2+3 > 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; comme en plus g est clairement continue, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$, et on a $g(x) > 0 \iff x > \alpha$. Par tâtonnement, on trouve que $\alpha \simeq -0{,}596\,071\,638$, donc $\alpha < 0$.

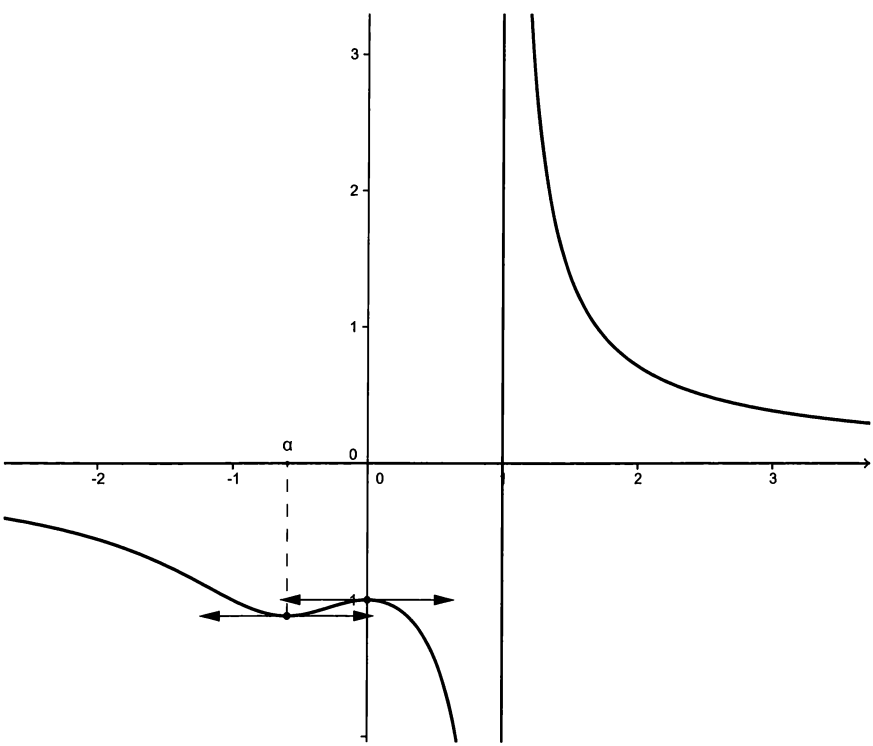
   Le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $-xg(x)$, et comme $g(x)$ est du signe de $x-\alpha$, on en déduit que $f'(x) < 0 \iff x \in]\alpha, 0[$.

   Voici le tableau de variation de f.



Les limites ne sont pas bien difficiles. On a $f(\alpha) \simeq -1{,}118\,433\,800$

4. Il n'y a plus grand chose à étudier : la courbe de f admet clairement une asymptote verticale (la droite verticale d'équation $x = 1$) et une asymptote horizontale (l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$).
   Voici l'aspect de la courbe de f.



Exercice 2.9. $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0+$, donc $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$, et comme $\lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0$, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. La fonction $\widehat{f}$ définie par $\widehat{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $\widehat{f}(0) = 0$ est

donc le prolongement par continuité de la fonction f, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Calculons d'abord, pour $x > 0$, la quantité $\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{\ln x}} = e^{-\frac{1}{x^2}-\ln x},$$

donc $\ln\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2} - \ln x = \dfrac{1}{x^2}\left(-1 - x^2 \ln x\right)$.

Sous cette forme, puisque $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$, on est sûr que $\lim\limits_{x\to 0+} -1 - x^2 \ln x = -1$, donc $\lim\limits_{x\to 0+} \ln\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = -\infty$, et enfin, donc $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Pour $x < 0$, on peut faire le changement de variable $x = -y$, avec $y > 0$: on a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = -\dfrac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y} = -\dfrac{f(y)}{y}$; or, pour $x \to 0-$, on a $y \to 0+$, et comme $\lim\limits_{y\to 0+} \dfrac{f(y)}{y} = 0$ d'après ce qu'on vient de voir, on a aussi $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{y\to 0+} -\dfrac{f(y)}{y} = 0$. Mais il était bien plus simple de remarquer que f est paire, et dans ce cas, l'étude sur $\mathbb{R}^-$ se déduit de celle qu'on a faite sur $\mathbb{R}^+$.

Donc on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, donc on a bien $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

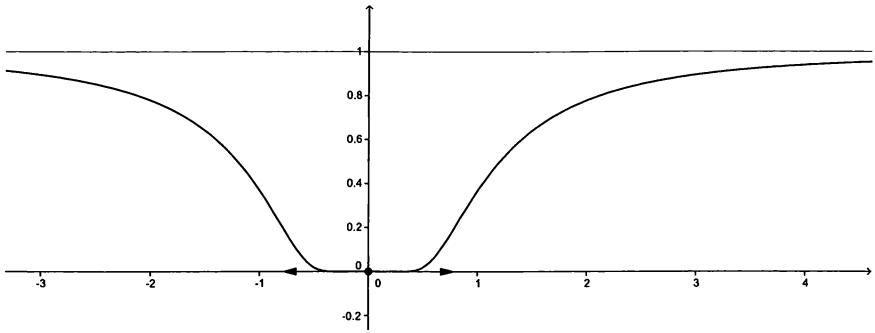
Si on essaie d'étudier la dérivabilité de $\widehat{f}$ en 0, on doit étudier la limite pour $x \to 0$, du taux d'accroissement $T_{\widehat{f},x,0} = \dfrac{\widehat{f}(x) - \widehat{f}(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x}$ puisqu'on ne considère bien sûr que des x non nuls. Comme $\lim\limits_{x\to 0} T_{\widehat{f},x,0} = 0$, cela signifie que $\widehat{f}$ est dérivable en 0 et que $\widehat{f}'(0) = 0$.

La courbe de $\widehat{f}$ passe donc par l'origine (d'après 1.) et admet en ce point une tangente horizontale.

3. La fonction $\widehat{f}$ est également paire ; il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$; elle est clairement dérivable sur $]0, +\infty]$, et on a, sur cet intervalle, $\widehat{f}'(x) = f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$; $\widehat{f}$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, (par parité, elle sera donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$).

Il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$ et comme $e^0 = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{f}(x) = 1$, la courbe de f admet donc la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$. Les variations de $\widehat{f}$ prouvent que la courbe est au dessous de son asymptote.

Voici l'aspect de la courbe de $\widehat{f}$



Exercice 2.10. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Le seul problème dans la définition de f est en 0 ; or, on a $-1 \leqslant \sin u \leqslant 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, donc en particulier $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$ et en multipliant par $x^2 \geqslant 0$, on obtient : $-x^2 \leqslant x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2$, c'est-à-dire $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$.
   Or, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes 1.12 p.9, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc f peut être prolongée par continuité en 0, et la fonction g obtenue (définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$) est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On doit étudier la limite du taux d'accroissement $T_{g,x,0}$ pour $x \to 0$:
   $$T_{g,x,0} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{f(x)-0}{x} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$
   On a $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1$; en multipliant par $|x| \geqslant 0$, on obtient $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$, d'où $-|x| \leqslant x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|$, et toujours par le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to 0} T_{g,x,0} = 0$, c'est-à-dire que la fonction g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.
3. On a $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. Pour $x \neq 0$, on a $g'(x) = f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, et $g'(0) = 0$. Pour prouver que g' n'est pas continue, il suffit de prouver que $g'(x)$ n'a pas 0 pour limite pour $x \to 0$. Faisons un raisonnement par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$; on a vu (en 2.) que $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$; on a $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - g'(x)$, donc d'après les règles d'opérations sur les limites, on aurait $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Ceci est absurde, car pour $x_k = \dfrac{1}{2k\pi}$, on a $\cos\left(\dfrac{1}{x_k}\right) = \cos(2k\pi) = 1$ alors que $x_k \to 0$ pour $k \to +\infty$: par composition de limites, on devrait avoir aussi $\lim\limits_{k\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x_k}\right) = 0$, et ce n'est pas le cas.

Exercice 2.11. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

$f(x)$ existe à condition que la quantité sous le radical existe et soit positive ; il faut donc déjà que $x \neq 1$, et que $\dfrac{x^3}{x-1} \geqslant 0$; or, $\dfrac{x^3}{x-1} = x^2\,\dfrac{x}{x-1}$ est du signe de $x(x-1)$, donc positive à l'extérieur de l'intervalle $[0,1]$. Finalement, on a $\mathscr{D}_f =]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$.

On est sûr de la dérivabilité de f pour les x qui n'annulent pas la quantité sous le radical, c'est-à-dire sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$; calculons $f'(x)$ pour x dans cet intervalle. On écrit tout d'abord $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$; on a donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$; or, $u'(x) = \dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$.

Donc

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}} = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$$

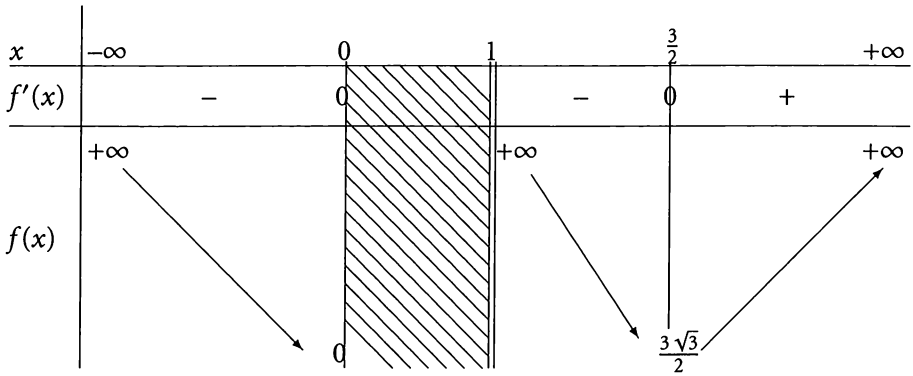
$$= (2x-3)\frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{(x-1)^4}}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}} = (2x-3)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}.$$

(*Remarquons que ce que nous avons fait est totalement légitime, l'expression qu'on a écrite a le même ensemble de définition que f, et même pour $x < 0$, à aucun moment nous n'avons écrit quelque chose d'interdit, comme la racine carrée d'un nombre négatif.*)

Sous cette forme, il est clair que $f'(x)$ est du signe de $2x-3$ (et donc s'annule pour $x = \frac{3}{2}$), et aussi que $\lim\limits_{x\to0-} f'(x) = 0$, donc en application du théorème 2.1 p.45, on a aussi $\lim\limits_{x\to0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, donc f est dérivable à gauche en 0, et on a $f'_g(0) = 0$. On peut donc affirmer que l'ensemble de dérivabilité coïncide avec l'ensemble de définition [3].

On peut maintenant faire le tableau de variation :

[3] Remarquons que nous avions juste écrit que f était dérivable sur l'ensemble $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, pas que cet ensemble était l'ensemble de dérivabilité. Nous ne pouvions pas affirmer, a priori, que f était dérivable en 0, mais nous ne pouvions pas non plus affirmer que f n'était pas dérivable en ce point. Simplement, nous ne savions pas. Maintenant nous savons que f est dérivable en ce point. Voir les raisonnements analogues (avec une conclusion pas toujours identique) faits lors de la résolution des exercices 1.15, 2.3, 2.6, 2.12, 2.13, 2.14.



$$f(\tfrac{3}{2}) = \sqrt{\frac{\frac{27}{8}}{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2{,}598\,076\,212$$

Les limites sont à peu près évidentes.

Il reste à étudier les branches infinies.

Utilisons la méthode du développement asymptotique, en posant $h = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{h}$, de sorte que $h \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h}-1}} = \sqrt{\frac{1}{h^2}\,\frac{1}{1-h}} = \frac{1}{|h|}(1-h)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{|h|}\left[1 - \frac{1}{2}(-h) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}(-h)^2 + h^2\varepsilon(h)\right] \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0 \\ &= \frac{1}{|h|}\left[1 + \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + h^2\varepsilon(h)\right] \end{aligned}$$

(*On a utilisé la formule donnant le d.l. de* $(1+u)^\alpha$)

Revenons à la variable x, en distinguant $x > 0$ ($x \to +\infty$) et $x < 0$ ($x \to -\infty$).

Si $x > 0$, on a $\frac{1}{|h|} = x$, donc :

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_1(x)\right) \text{ (avec } \lim_{x\to+\infty}\varepsilon_1(x) = 0)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1(x).$$

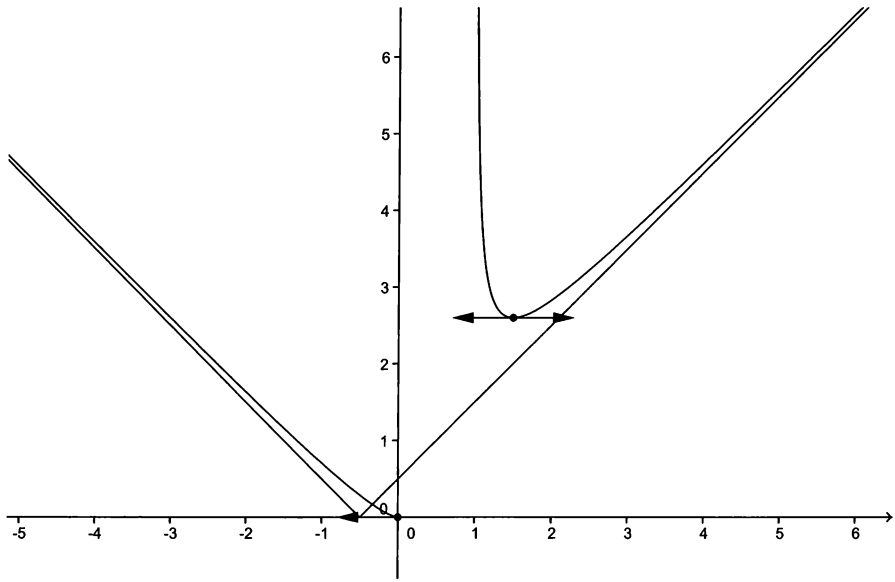
Sous cette forme, il est clair que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f, et de plus la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Si $x < 0$, on a $\frac{1}{|h|} = -x$, donc :

$$f(x) = -x\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_1(x)\right) \text{ (avec } \lim_{x\to-\infty}\varepsilon_1(x) = 0)$$

$$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2(x) \text{ (avec } \lim_{x\to-\infty}\varepsilon_2(x) = 0).$$

Sous cette forme, il est clair que la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f, et de plus la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$ (car $-\frac{3}{8x} > 0$ pour $x \to -\infty$).
Voici l'aspect de la courbe de f :



Exercice 2.12. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

1. Il vaut mieux traduire avec la fonction exponentielle l'expression définissant une telle fonction définie avec des puissances non entières :
   Soit $u(x) = \ln(f(x)) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, donc $f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{u(x)}$;
   $f(x)$ existe à condition que $u(x)$ existe, et pour cela, il faut et il suffit que $1 + \frac{1}{x}$ existe et soit strictement positif ; comme $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$, il est clair que l'ensemble de définition (et de dérivabilité) de la fonction f est $\mathscr{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
2. Calculons $f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$; on a
   $u'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = g(x)$;
   donc $f'(x) = g(x)e^{u(x)}$ et comme $e^y > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont bien de même signe.

3. g est une fonction définie sur le même ensemble $\mathscr{D}_g = \mathscr{D}_f =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ que f ; on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}; \end{aligned}$$

donc $g'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty,-1[$ et $g'(x) < 0$ pour $x \in]0,+\infty[$; on peut en déduire que g est croissante sur $]-\infty,-1[$ et que g est décroissante sur $]0,+\infty[$; comme clairement on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, on peut en déduire : que $g(x) > 0$ sur $]-\infty,-1[$ et $g(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$. On en déduit qu'on a $f'(x) > 0$ sur $\mathscr{D}_f$; on peut en déduire que f est croissante sur $]-\infty,-1[$ et que f est croissante sur $]0,+\infty[$ (f est croissante sur chacun des intervalles formant son ensemble de définition) ; en revanche, il serait faux de dire « f est croissante », car f n'est pas croissante sur $\mathscr{D}_f$ tout entier : on peut trouver des couples (x_1,x_2), avec $x_1 < -1$ et $x_2 > 0$ tels que $x_1 < x_2$ mais $f(x_1) > f(x_2)$ (voir la courbe de f).

4. Puisque $u(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, il est évident que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$, donc on est en présence d'une forme indéterminée, du type « $\infty \cdot 0$ », pour $u(x)$; mais on peut écrire

$u(x) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$, avec $h = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$; comme on sait (limite de référence) que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$, on peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x) = 1$, de sorte que, puisque $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathrm{e}$.

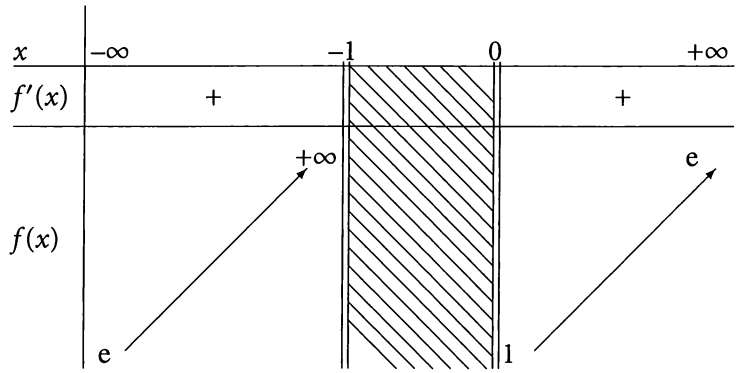
Puisque $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0+} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$; mais $x \to 0$, donc on est en présence d'une forme indéterminée du type « $0 \cdot \infty$ », qu'on lèvera en écrivant, pour $x > 0$:

$u(x) = x(\ln(x+1) - \ln x) = x\ln(x+1) - x\ln x$; on sait que $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$ (c'est une limite de référence), donc $\lim\limits_{x\to 0+} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1$.

Enfin, on a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} 1+\dfrac{1}{x} = 0+$, de sorte que $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} u(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$

Voici le tableau de variation de f :



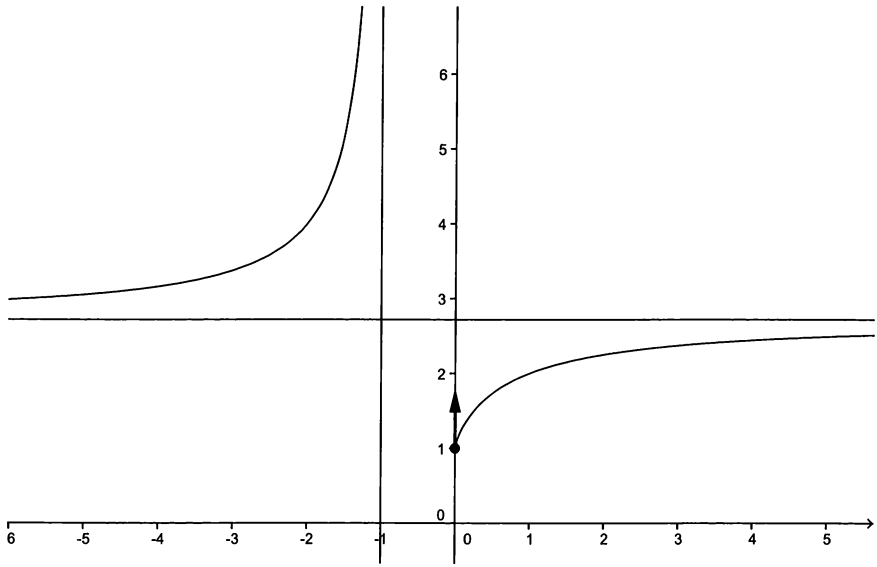
On voit que la courbe de f admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale, la droite d'équation $y = \mathrm{e}$ comme asymptote horizontale en $\pm\infty$, et on voit aussi que la courbe de f admet un point limite (le point de coordonnées $(0,1)$) pour $x \to 0+$. Il est intéressant de déterminer la tangente en ce point limite ; pour cela, on calcule $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$;

Or, on a $f'(x) = g(x)f(x)$, et $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$; il suffit de déterminer la limite, pour $x \to 0+$, de $g(x)$;

Or, $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, et comme $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x+1} = 1$, il est clair que $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$.

Si on prolonge la fonction f par continuité à droite en 0, en posant $\widehat{f}(0) = 1$, on peut en déduire que $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-\widehat{f}(0)}{x-0} = +\infty$, donc la courbe de f admet, en son point limite d'abscisse nulle, une demi-tangente verticale, tournée vers le haut.

Voici l'aspect de la courbe de f :



Exercice 2.13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

La fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$; f est continue sur son ensemble de définition, mais comme la fonction racine cubique n'est pas dérivable en 0, il y aura problème de dérivabilité pour les x qui annulent la quantité sous le radical ; 1 est racine évidente de x^3-3x+2, et on peut factoriser $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$; on est sûr que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$; on a $f(x) = (x^3-3x+2)^{\frac{1}{3}}$, de sorte que, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$, on a $f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2-3)(x^3-3x+2)^{\frac{1}{3}-1} = (x^2-1)(x^3-3x+2)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$.

Sous cette forme, il est clair que $f'(x)$ est du signe de x^2-1, donc positif à l'extérieur de $[-1,1]$.

D'autre part, on peut aussi écrire :

$$f'(x) = (x-1)(x+1)[(x-1)^2(x+2)]^{-\frac{2}{3}} = (x-1)(x+1)(x-1)^{-\frac{4}{3}}(x+2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = (x+1)(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+2)^2}}.$$

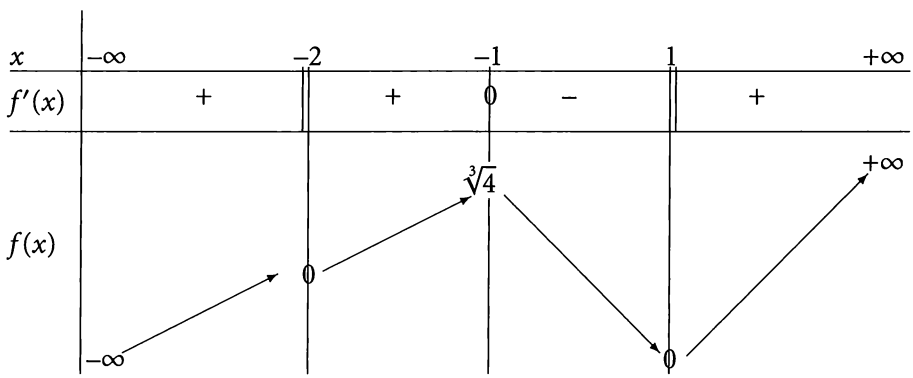
Sous cette forme, il est clair que $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^{\pm}} f'(x) = +\infty$. Ceci suffit pour affirmer que la fonction f n'est pas dérivable en 1 ni en -2, et que la courbe de f admet en ces points des demi-tangentes verticales : en effet, il suffit d'appliquer le théorème 2.1 p.45, pour obtenir $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$. Plus précisément, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$, de sorte qu'à gauche de 1, la demi-tangente verticale est tournée vers *le haut* alors qu'à droite de 1, la demi-

tangente verticale est tournée vers le haut également : on représentera au point de la courbe de f d'abscisse 1 juste une demi-tangente verticale tournée vers le haut.

Au contraire, comme on a

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$, à gauche de -2, la demi-tangente verticale est tournée vers *le bas*, tandis qu'à droite de -2, la demi-tangente verticale est tournée vers le haut : on représentera, au point de la courbe de f d'abscisse -2, une tangente verticale complète.

Voici le tableau de variation de f :



Les limites à l'infini sont à peu près évidentes. On a $f(-1) = \sqrt[3]{-1+3+2} = \sqrt[3]{4}$.

Il reste à étudier les branches infinies ; le plus simple est d'utiliser un développement asymptotique : on pose $x = \frac{1}{h}$ dans l'expression de $f(x)$ (pour $x \to \pm\infty$, on a bien $h \to 0$) :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2} = \sqrt[3]{\frac{1-3h^2+2h^3}{h^3}} = \frac{1}{h}(1-3h^2+2h^3)^{\frac{1}{3}}.$$

On sait que $(1+u)^\alpha = 1+\alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + u^2\varepsilon_1(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon_1(u) = 0$.

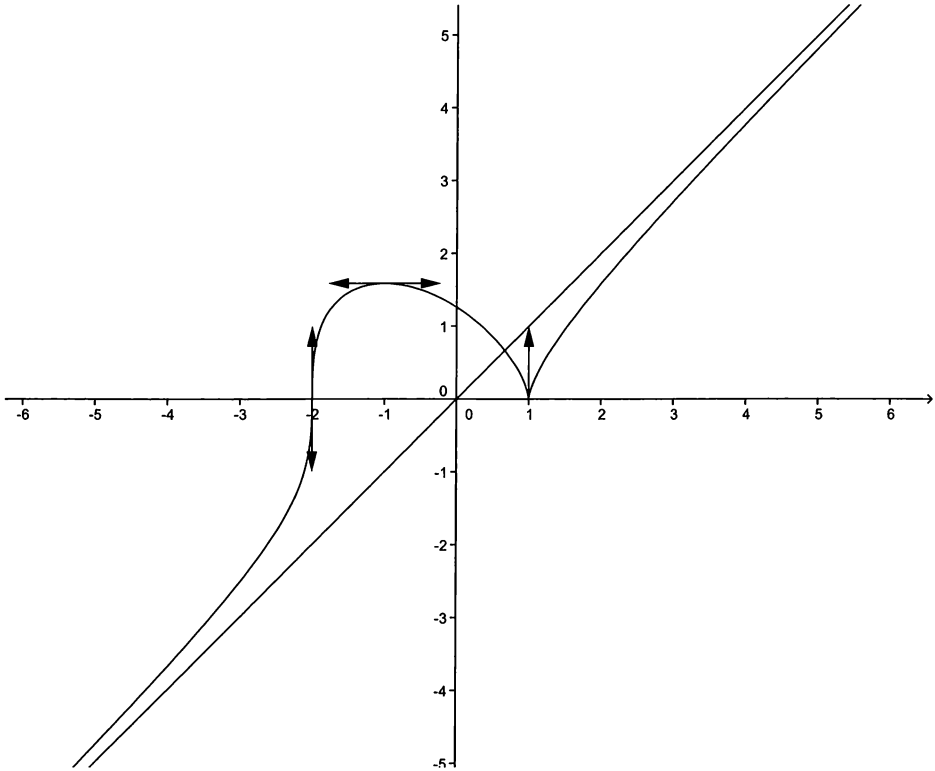
Ici, pour $\alpha = \frac{1}{3}$, $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}u^2+u^2\varepsilon_1(u)$.

On peut appliquer cette formule avec $u = (-3h^2+2h^3)$ car on a bien $u \to 0$ pour $h \to 0$; on a donc (avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0$)

$$f(x) = \frac{1}{h}\left(1-h^2+\frac{2}{3}h^3+h^3\varepsilon_2(h)\right) = \frac{1}{h}-h+\frac{2}{3}h^2+h^2\varepsilon_2(h) = x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x) = 0.$$

Sous cette forme, il est clair que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f, et pour $x \to +\infty$, la courbe de f est au-dessous de l'asymptote tandis que pour $x \to -\infty$, la courbe de f est au-dessus de l'asymptote ($f(x)-x = \dfrac{1}{x}(-1+\varepsilon(x))$ est du signe de $-x$ pour $|x|$ suffisamment grand.

Voici l'aspect de la courbe de f :



Exercice 2.14. $f(x) = |x|^{\frac{1}{x+2}}$

1. On peut écrire $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x+2}\ln(|x|)\right)$, donc sous cette forme, il est évident qu'il suffit que $x \neq 0$ et $x \neq -2$ pour que $f(x)$ existe. On a donc bien : $\mathscr{D}_f =]-\infty,-2[\cup]-2,0[\cup]0,+\infty[$, et clairement f est dérivable sur cet intervalle.
2. On écrit $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x+2}\ln(|x|)$; sous cette forme, il est facile de dériver f :
   $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = u'(x)f(x)$; on voit que $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$.
   Or, on a

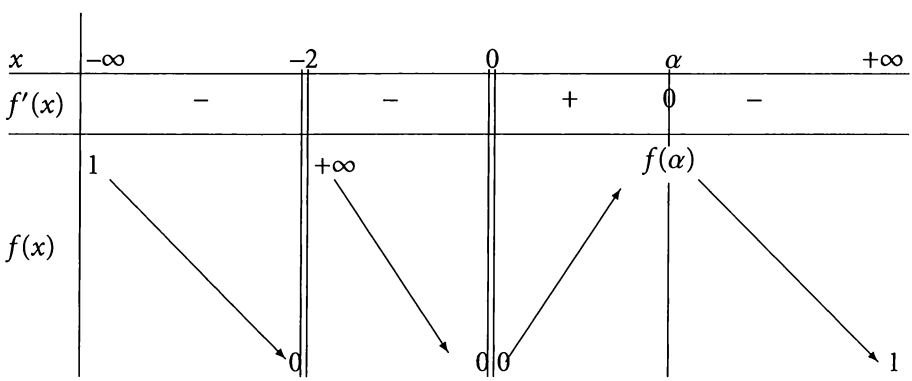
$$u'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}\ln|x| + \frac{1}{x+2}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{(x+2)^2}\left(-\ln|x| + (x+2)\,\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{(x+2)^2}\left(1 + \frac{2}{x} - \ln|x|\right)$$
$$u'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}g(x) \text{ avec } g(x) = 1 + \frac{2}{x} - \ln|x|;$$

   sous cette forme, il est clair que $u'(x)$ (donc aussi $f'(x)$) est du même signe que $g(x)$.

3. g est définie sur $\mathbb{R}^*$; on a $g'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2-x}{x^2}$; $g'(x)$ est du signe de $-x-2$; comme $g(-2) = -\ln 2 < 0$, et comme g est croissante sur $]-\infty,-2[$ et décroissante sur $]-2,0[$, on est sûr que $g(x) < 0$ sur $]-\infty,0[$; d'autre part, on a $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (ces deux limites sont « évidentes », il n'y a aucune indétermination), on peut affirmer que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et comme g est continue, il existe un unique $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$, et $g(x) > 0$ pour $0 < x < \alpha$ alors que $g(x) < 0$ pour $x > \alpha$. Par tâtonnement, on trouve $\alpha \simeq 4{,}319\,136\,566$.

Pour déterminer les limites de $f(x)$ (et compléter le tableau de variation, on a besoin des limites en $\pm\infty$, et aussi des limites à droite et à gauche en -2 et en 0), il suffit de considérer les limites de $u(x) = \frac{1}{x+2}\ln(|x|)$; il est clair que $u(x) \to 0$ pour $x \to \pm\infty$ (on factorise x, et on se ramène facilement à la limite de référence $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$), donc $f(x) \to e^0 = 1$; en 0, à droite et à gauche, $\ln|x| \to -\infty$, donc $u(x) \to -\infty$, et donc $f(x) \to 0$; enfin, à droite de -2, on a $u(x) \to +\infty$, tandis qu'à gauche de -2, on a $u(x) \to -\infty$, de sorte que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$.

On peut alors faire le tableau de variation de f :



4. Déterminer les limites de $f'(x)$ lorsque x tend vers 2 et 0. On a

$$f'(x) = u'(x)f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}\left(\frac{x+2}{x} - \ln|x|\right)e^{\frac{\ln|x|}{x+2}}$$
$$= \frac{1}{x(x+2)}e^{\frac{\ln|x|}{x+2}} - \ln|x|e^{\frac{\ln|x|}{x+2}}.$$

En $-2-$:

Le terme $\ln|x|e^{\frac{\ln|x|}{x+2}} = \ln|x|f(x)$ tend vers $\ln 2 \cdot 0 = 0$; il y a une indétermination du

type « $\infty \times 0$ » pour l'autre terme $w(x) = \dfrac{1}{x(x+2)} e^{\frac{\ln|x|}{x+2}}$; mais on calcule

$$\ln(w(x)) = -\ln|x| - \ln|x+2| + \frac{\ln|x|}{x+2}$$
$$= \frac{(x+2)\ln|x| - (x+2)\ln|x+2| + \ln|x|}{x+2};$$

Comme il est clair que $(x+2)\ln|x+2| \xrightarrow[x<-2]{x\to -2} 0$ (c'est une limite de référence, on pose $h = -x-2$, et on se ramène à $\lim\limits_{h\to 0+} h\ln h$)), le numérateur de $\ln(w(x))$ tend vers $\ln 2 > 0$, et donc on a $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \ln(w(x)) = -\infty$, de sorte que $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} w(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f'(x) = 0$. Si on prolonge par continuité à gauche en -2 la fonction f en la fonction $\widehat{f}$ en posant $\widehat{f}(-2) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{f(x) - \widehat{f}(-2)}{x+2} = 0$, donc la courbe de f admet, à gauche de son point limite d'abscisse -2 (d'ordonnée nulle), une demi-tangente horizontale.

Au voisinage de 0 :

Si on veut raisonner avec la dérivée :

En 0+ :

On a $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+2)} e^{\frac{\ln x}{x+2}} - (\ln x) e^{\frac{\ln x}{x+2}} = w(x) + t(x)$;

Les limites de $w(x)$ et de $t(x)$ sont toutes les deux indéterminées du type « $\infty \times 0$ ».

On calcule $\ln(w(x)) = -\ln x - ln(x+2) + \dfrac{\ln x}{x+2} = \ln x\left(-1 + \dfrac{1}{x+2}\right) - \ln(x+2)$;

Sous cette forme, on constate que puisque $\lim\limits_{x\to 0+} -1 + \dfrac{1}{x+2} = -\dfrac{1}{2} < 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(w(x)) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0+} w(x) = +\infty$.

Or, on a $\ln x < 0$ (pour $0 < x < 1$, donc en particulier au voisinage de 0+), et $e^{\frac{\ln x}{x+2}} > 0$, donc $t(x) = -(\ln x) e^{\frac{\ln x}{x+2}} > 0$, donc $w(x) + t(x) > w(x)$, donc $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} w(x) + t(x) = +\infty$.

Avec le même raisonnement, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - \widetilde{f}(0)}{x-0} = +\infty$ ($\widetilde{f}$ étant le prolongement par continuité de f en 0, définie par $\widetilde{f}(0) = 0$), donc la courbe de f admet, à droite de son point limite d'abscisse nulle, une demi-tangente verticale tournée vers le haut.

En 0– :

C'est le même raisonnement : on écrit encore

$f'(x) = \dfrac{1}{x(x+2)} e^{\frac{\ln|x|}{x+2}} - (\ln|x|)e^{\frac{\ln|x|}{x+2}} = w(x) + t(x)$, et on a toujours les mêmes indéterminations, avec aussi $t(x) > 0$; on démontre de la même manière que $\ln(-w(x)) \to +\infty$, donc $-w(x) \to +\infty$ et $w(x) \to -\infty$; la difficulté est que comme $t(x) > 0$, il faut calculer sa limite...

En fait, on peut s'en sortir en factorisant x, car on obtient une forme indéterminée de référence $\frac{\ln|x|}{x}$, mais c'est bien compliqué.

Il était bien plus simple de raisonner directement avec le taux d'accroissement :

Directement avec le taux d'accroissement : (raisonnement valable à la fois en 0+ et 0–) :

On écrit $\dfrac{f(x)-\widetilde{f}(0)}{x-0} = \dfrac{|x|}{x}\dfrac{f(x)}{|x|} = \dfrac{|x|}{x}\dfrac{|x|^{\frac{1}{x+2}}}{|x|}$;

on a donc $\dfrac{f(x)}{|x|} = |x|^{\frac{1}{x+2}-1} = \exp\left(\left(\dfrac{1}{x+2}-1\right)\ln|x|\right)$;

Comme $\frac{1}{x+2}-1 \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2} < 0$, et $\ln|x| \xrightarrow[x\to 0\pm]{} -\infty$, on a donc

$\left(\frac{1}{x+2}-1\right)\ln|x| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, et $\dfrac{f(x)}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$; finalement, on peut conclure, selon le signe de x :

$\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe de f admet à droite et *à gauche* de son point limite d'abscisse nulle une demi-tangente verticale tournée vers le haut.

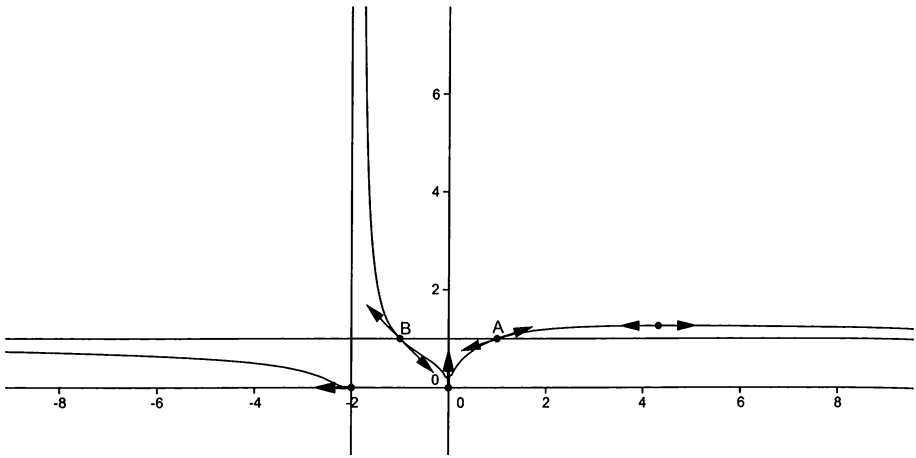
5. La droite d'équation $y = 1$ est l'asymptote horizontale à la courbe de f. On doit résoudre $|x|^{\frac{1}{x+2}} = 1$ ou, en passant aux logarithmes, $u(x) = \dfrac{1}{x+2}\ln|x| = 0$; comme il est clair que $\dfrac{1}{x+2}$ ne s'annule pas, c'est uniquement pour $\ln|x| = 0$, donc $|x| = 1$, qu'on a des solutions. Les deux points d'intersections de la courbe de f avec l'asymptote horizontale $y = 1$ sont les points $A(1,1)$ et $B(1,-1)$.

Puisque $f'(x) = u'(x)f(x)$, avec $u'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}\left(1+\dfrac{2}{x}-\ln|x|\right)$ les tangentes à la courbe de f en ces points ont comme coefficient directeur respectivement :

$f'(1) = u'(1)f(1) = u'(1) = \dfrac{1}{3^2}(1+2-0) = \dfrac{1}{3}$ et

$f'(-1) = u'(-1)f(-1) = u'(-1) = \dfrac{1}{1^2}(1-2-0) = -1.$

6. Voici l'aspect de la courbe de f.



CHAPITRE 3

3. Corrigés des exercices sur les nouvelles fonctions de référence

Exercice 3.1.

1. La fonction arcsin est impaire, donc $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.
   De même la fonction arctan est aussi impaire, donc $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.
   En revanche, pour la fonction arccos, c'est un peu plus compliqué.
   On a vu que pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
   Donc $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ et $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$; ces deux résultats, ainsi que le fait que arcsin soit impaire permettent d'obtenir :

$$\arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - (-\arcsin x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$$
$$\arccos(-x) = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \pi - \arccos x.$$

2. Toutes ces formules sont dans le cours : les quatre premières sont valables pour $x \in [-1,1]$ et la dernière pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$\sin(\arcsin x) = x$$
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\cos(\arccos x) = x$$
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\tan(\arctan x) = x$$

3. a) On va exprimer $\sin y$ en fonction de $\tan y$ pour pouvoir utiliser la formule $\tan(\arctan x) = x$.

On sait que $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ et $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\tan^2 y}$, donc

$$\sin^2 y = 1 - \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{\tan^2 y}{1+\tan^2 y}.$$

En prenant les racines carrées de chaque côté (et en se rappelant que $\sqrt{X^2} = |X|$), on a donc $|\sin y| = \dfrac{|\tan y|}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$.

Or, on va appliquer cette formule avec $y = \arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; pour y dans cet intervalle, on a $\cos y > 0$, donc $\sin y$ et $\tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$ sont de même signe, de sorte qu'on peut affirmer que $\sin y = \dfrac{\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$.

Puisque $y = \arctan x$, on a $\tan y = x$, donc

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(*Formule valable pour tout* $x \in \mathbb{R}$)

b) On a $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\tan^2 y}$, et pour $y = \arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos y > 0$, donc $\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$, et pour $y = \arctan x$, on a donc finalement

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(*Formule valable pour tout* $x \in \mathbb{R}$)

c) Comme $\tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$, on a $\tan(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, d'après 1.

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(*Formule valable pour tout* $x \in [-1,1] \setminus \{-1,1\} =]-1,1[$)

d) Exactement la même méthode : $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

(*Formule valable pour tout* $x \in [-1,1] \setminus \{0\} = [-1,0[\cup]0,1]$)

Exercice 3.2.

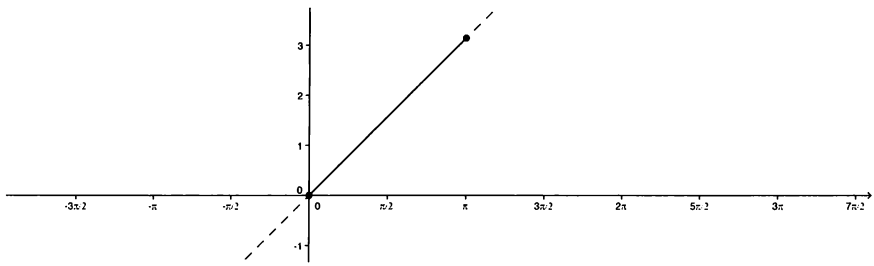
1. Puisque la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, le seul problème de définition de f est en 0, à cause du dénominateur. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.
   Comme la fonction arctan est impaire (voir exercice précédent), il est clair que f est aussi impaire.
   f est évidemment dérivable sur son ensemble de définition, et on a :
   $$f'(x) = \arctan'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\arctan'\left(\frac{1}{x}\right)$$
   Et comme $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
   $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$
   $$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$
   D'après le tableau de valeurs de la page 65, on a $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, donc $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
2. On a vu qu'on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$, donc en particulier, sur l'*intervalle* $]0,+\infty[$, on a $f'(x) = 0$, donc la fonction f est constante sur cet *intervalle.* Puisque $1 \in]0,+\infty[$, et puisque $f(1) = \frac{\pi}{2}$, on peut en déduire que la valeur constante de la fonction f sur cet intervalle est donc $\frac{\pi}{2}$. On a donc prouvé que
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
3. La fonction f étant impaire, on a $f(-1) = -f(1) = -\frac{\pi}{2}$; d'autre part, puisque $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty,0[$, on peut en déduire que la fonction f est aussi constante sur l'intervalle $]-\infty,0[$, donc on a
   $$\forall x < 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3.3.

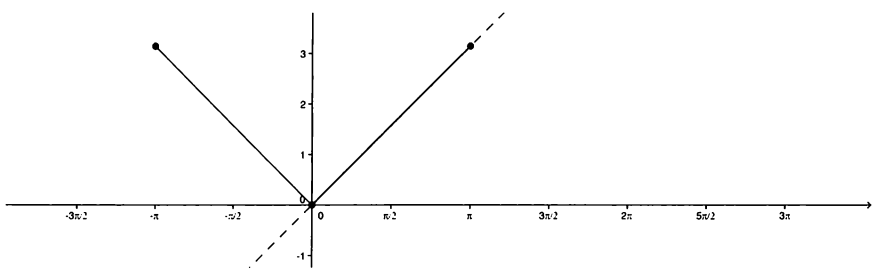
1. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est à valeurs dans $[-1,1]$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \in [-1,1]$) ; comme la fonction arccos est justement définie sur $[-1,1]$, on est sûr que $\arccos(\cos x)$ existe pour tout $\mathbb{R}$, donc $\mathscr{D}_{f_1} = \mathbb{R}$.
   D'autre part, cos étant une fonction 2π-périodique, il est clair que f_1 est aussi 2π-périodique. De même, cos étant une fonction paire, il en est de même de la fonction f_1.[4]

[4] On a $f_1(x+2\pi) = \arccos(\cos(x+2\pi)) = \arccos(\cos x) = f_1(x)$
et $f_1(-x) = \arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x) = f_1(x)$.

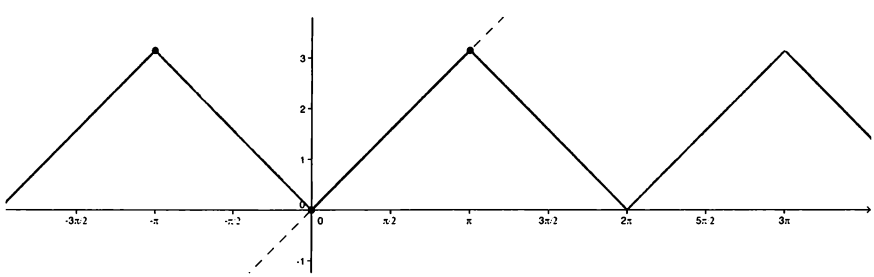
Comme on a, d'après le cours, $\arccos(\cos x) = x$ pour tout $x \in [0,\pi]$, on peut représenter la fonction f_1 sur l'intervalle $[0,\pi]$ (sa courbe coïncide avec la première bissectrice du repère).



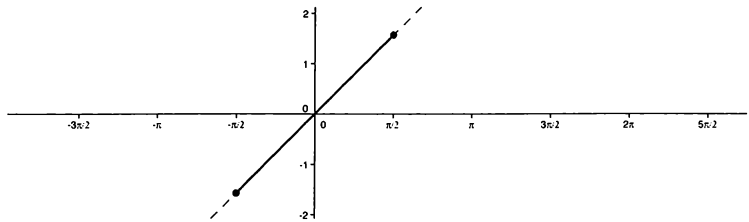
On peut ensuite compléter par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées en utilisant la parité de f.



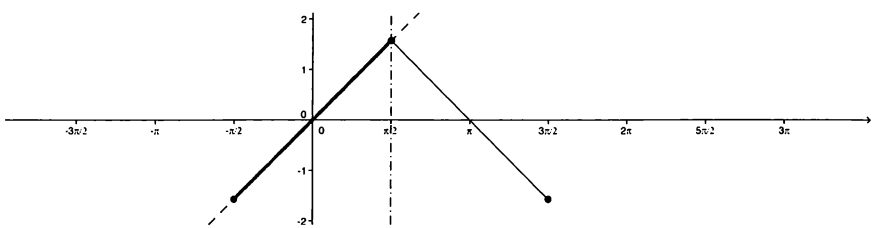
On dispose de la représentation graphique de f_1 sur $[-\pi,\pi]$, qui est un intervalle de longueur la période 2π, donc on connaît à présent la représentation graphique de f_1 sur $\mathbb{R}$ tout entier : il suffit de translater : voici l'aspect de la représentation graphique de f_1 sur $\mathbb{R}$.



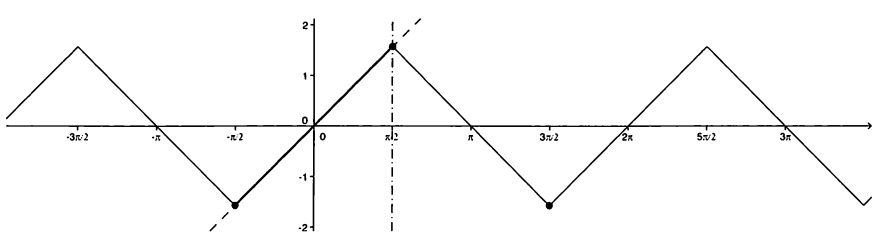
2. Pour f_2, on travaille comme pour f_1 : on a $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et on peut déjà tracer la courbe de f_2 sur cet intervalle.



On peut montrer que f_2 est impaire, mais cela n'aide pas vraiment à prolonger la fonction. En revanche, comme on sait que $\sin(\pi - x) = \sin x$ pour tout x, on a aussi $f_2(\pi - x) = f_2(x)$ pour tout x, et cela signifie que la courbe de f_2 admet la droite verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie. [5] On peut donc appliquer cette symétrie.



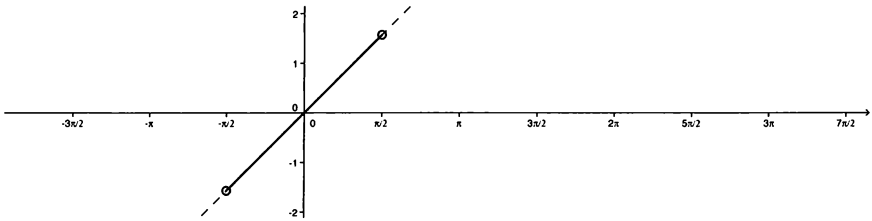
On connaît à présent la fonction f_2 sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ qui est de longueur 2π et comme la fonction f_2, comme la fonction sin, est 2π-périodique (même raisonnement que pour f_1), on connaît toute la représentation graphique en translatant.



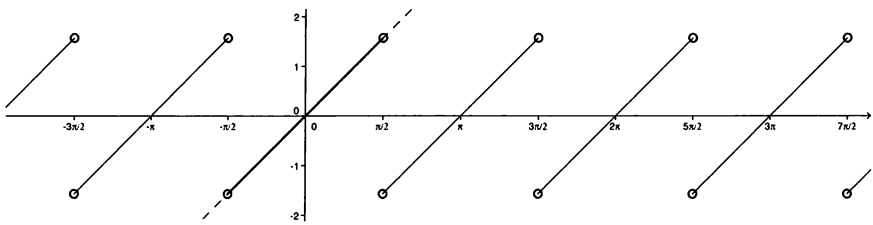
3. Toujours le même procédé : la fonction tan est π-périodique, donc il en est de même pour la fonction f_3 ; de même, tan est définie sauf pour les x de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), donc c'est la même chose pour f_3 (puisque arctan est définie sur $\mathbb{R}$), et sur

[5] C'est un résultat classique vu au lycée : le symétrique du point $M(x,y)$ par rapport à la droite verticale Δ d'équation $x = a$ est le point $M'(2a-x,y)$, car c'est le point qui a la même ordonnée que M, et le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées (a,y), donc appartient bien à l'axe Δ. Et si $f(x) = f(2a-x)$, cela signifie que M est sur la courbe de f si et seulement si son symétrique M' l'est aussi.

l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (qui est de longueur π), on a $\arctan(\tan x)=x$, donc on trace la fonction f_3 sur cet intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$



Puis on complète par translations :



4. On va procéder de la même façon pour l'ensemble de définition et pour la périodicité : puisque sin est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et est à valeurs dans $[-1,1]$, alors la fonction f_4 est aussi 2π-périodique et est bien définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite, on a, pour tout x, $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

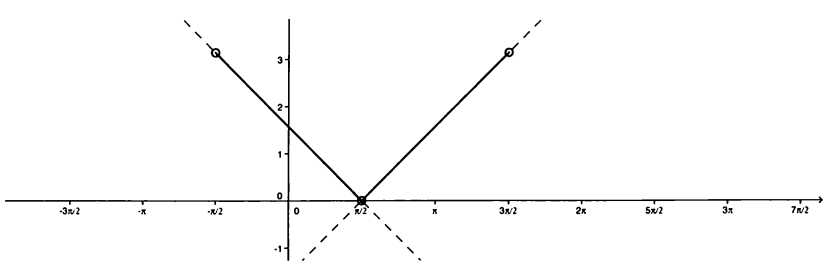
Donc $f_4(x)=\arccos\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Posons $y=x-\frac{\pi}{2}$ et $z=\frac{\pi}{2}-x$.

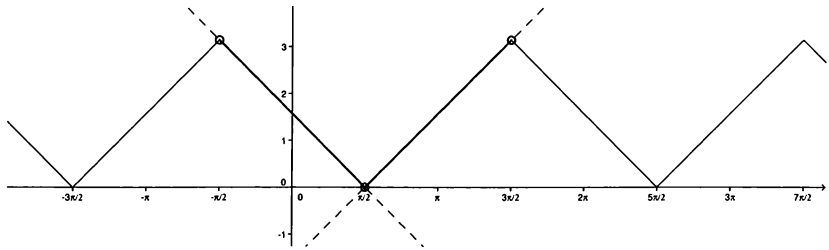
Lorsque $y=x-\frac{\pi}{2}\in[0,\pi]$, d'après 1., on a $f_4(x)=f_1(y)=y=x-\frac{\pi}{2}$; ce cas arrive lorsque $0\leqslant x-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi$, c'est-à-dire pour x tel que $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$. On a donc $f_4(x)=x-\frac{\pi}{2}$ sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

De même, lorsque $z=\frac{\pi}{2}-x\in[0,\pi]$, pour la même raison, on a $f_4(x)=f_1(z)=z=\frac{\pi}{2}-x$; ce cas survient lorsque

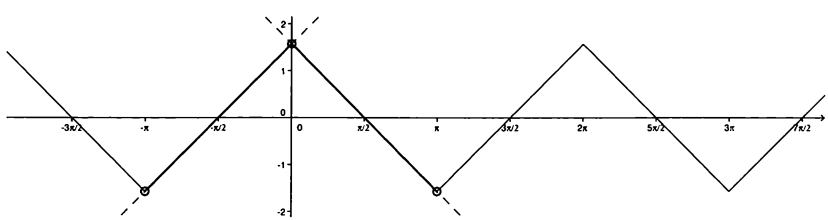
$0\leqslant\frac{\pi}{2}-x\leqslant\pi\iff-\frac{\pi}{2}\leqslant-x\leqslant\frac{\pi}{2}\iff\frac{\pi}{2}\geqslant x\geqslant-\frac{\pi}{2}$, donc sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a $f_4(x)=\frac{\pi}{2}-x$.



On connaît maintenant la fonction f_4 sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, qui est de longueur 2π, il n'y a donc plus qu'à prolonger par translations.



5. Même méthode : f_5 est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et paire. Puisque $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$, on a $f_5(x) = \arcsin\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$; lorsque $x+\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire pour $x \in [-\pi, 0]$, on a $f_5(x) = \arcsin\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = x+\frac{\pi}{2}$; on peut donc représenter f_5 sur cet intervalle, puis on complète par parité, et ensuite par translations. On obtient :



Exercice 3.4.

1. On sait que $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $2\arctan x \in]-\pi, \pi[$; les nombres y de cet intervalle $]-\pi, \pi[$ qui sont en dehors de l'ensemble de définition de la fonction tan sont $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$, qui correspondent à $x = \pm 1$. Donc l'égalité à démontrer ne peut être valable que sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

   On sait que $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$;

   Pour $\alpha = \arctan x$, on a $\tan\alpha = \tan(\arctan x) = x$, donc

   $$\tan(2\arctan x) = \frac{2\tan(\arctan x)}{1-(\tan(\arctan x))^2} = \frac{2x}{1-x^2}.$$

2. arctan et cos sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, donc il n'y a aucun problème de définition dans l'égalité à démontrer.

   On sait que $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\tan^2 y}$, et d'autre part,

   $$\cos(4y) = 2\cos^2(2y) - 1 = 2\left(2\cos^2 y - 1\right)^2 - 1 = 8\cos^4 y - 8\cos^2 y + 1.$$

En appliquant ces deux formules avec $y = \arctan x$, (et donc $\tan y = x$) on a donc

$$\begin{aligned}\cos(4\arctan x) &= 8\left(\cos^2 y\right)^2 - 8\cos^2 y + 1 = 8\left(\frac{1}{1+\tan^2 y}\right)^2 - 8\frac{1}{1+\tan^2 y} + 1\\ &= 8\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 - 8\frac{1}{1+x^2} + 1 = \frac{8-8(1+x^2)+(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

Exercice 3.5. Préliminaire : déterminons l'ensemble de définition de l'expression définissant $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$. Comme la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, les seuls problèmes de définition sont dus au dénominateur et au radical. On doit avoir $x \neq -1$ à cause du dénominateur, et $x \in]-1,1]$ pour que $\frac{1-x}{1+x} \geqslant 0$, donc :

$$\mathscr{D}_f =]-1,1].$$

Première méthode : on dérive f en espérant une simplification de la dérivée.

$f(x) = \arctan(u(x))$ avec $u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{v(x)}$, avec $v(x) = \frac{1-x}{1+x}$; on a donc

$f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$; or, $u'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$ et $v'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}$ (calcul élémentaire).

Donc $u'(x) = \dfrac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \dfrac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$,

et finalement $f'(x) = \dfrac{\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \dfrac{-1}{2(1-x^2)}$.

On reconnaît la dérivée de la fonction arccos multipliée par $\frac{1}{2}$ (ou aussi la dérivée de la fonction arcsin multipliée par $-\frac{1}{2}$), donc on a $f(x) = \frac{1}{2}\arccos x + C$ pour tout $x \in]-1,1]$.
Pour $x = 0$, on a $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\arccos 0$, donc $C = 0$.
Conclusion :

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\arccos x.$$

Deuxième méthode : puisque $x \in]-1,1]$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos 2\theta$. Plus précisément, on peut prendre $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, en posant $\theta = \frac{1}{2}\arccos x$.

On a donc $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right)$;

Or, il est bien connu que $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, donc $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$ et $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$.

On a donc $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\tan^2\theta}\right) = \arctan|\tan\theta|$.

Mais $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, donc $0 \leqslant \tan\theta < +\infty$, et par conséquent $|\tan\theta| = \tan\theta$: on a $f(x) = \arctan(\tan\theta)$, avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, donc $f(x) = \theta = \frac{1}{2}\arccos x$.

Exercice 3.6.

1. Pour $x \in [-1,1]$, on a $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, donc $0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2$ et $-1 \leqslant 2x^2-1 \leqslant 1$, donc $2x^2-1 \in [-1,1]$.

   Comme l'ensemble de définition de la fonction arcsin est $[-1,1]$, $\arcsin(2x^2-1)$ existe toujours pour $x \in [-1,1]$; il est clair que si $|x| > 1$, on a $2x^2-1 > 1$ donc $f(x)$ n'existe pas. On a donc $\mathscr{D}_f = [-1,1]$. Notons que f est bien sûr continue sur son ensemble de définition.

   f est clairement paire, donc il suffit d'étudier f sur $[0,1]$, et de compléter ensuite l'étude en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, on a toujours $x^2 \in]0,1[$, donc $2x^2-1 \in]-1,1[$. Or, le domaine de dérivabilité de arcsin est justement $]-1,1[$, donc f est bien dérivable pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$.

   On a $f(x) = \arcsin(u(x))$ avec $u(x) = 2x^2-1$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}} = \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2}} \\ &= \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x|}\,\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

3. Pour $x > 0$, on a donc $f'(x) = 2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin'(x)$. Il existe donc une constante C telle que $f(x) = 2\arcsin x + C$, ceci pour tout $x \in]0,1[$ (ce raisonnement n'est pour l'instant valable que pour les x positifs pour lesquels f est dérivable).

   Mais f est continue, donc en particulier, on a

$$f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\arcsin x + C = 2\arcsin(0) + C = C.$$

   Or, $f(0) = \arcsin(2.0^2-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, donc $C = -\frac{\pi}{2}$. On a prouvé, pour l'instant que $f(x) = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [0,1[$. Il reste encore à prouver que cette formule est aussi valable pour $x = 1$: on peut le faire par un passage à la limite,

ou plus simplement en faisant la vérification pour $x = 1$: $f(1) = \arcsin(2.1^2 - 1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $2\arcsin(1) - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = f(1)$.

Pour les x négatifs : on a $f'(x) = -2\arcsin'(x)$ pour $x < 0$.

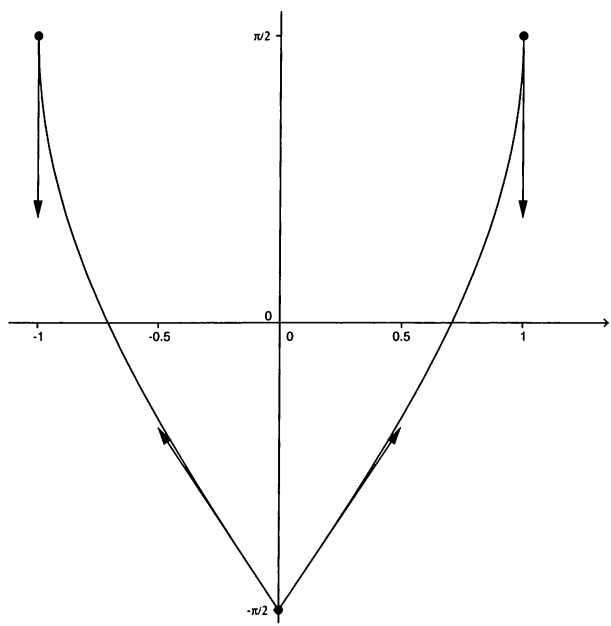
Donc $f(x) = -2\arcsin(x) + C_2$ pour tout $x \in]-1, 0[$. Par continuité, on a $f(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -2\arcsin(x) + C_2 = -2\arcsin(0) + C_2 = C_2$, donc $C_2 = -\frac{\pi}{2}$, et on a $f(x) = -2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in]-1, 0]$. On vérifie aisément (par exemple par parité) que cette formule est encore valable pour $x = -1$.

Pour utiliser la fonction arccos, il suffit de se rappeler que $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$, donc $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

On a donc : pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\arccos x$

et pour tout $x \in [-1, 0]$, $f(x) = -2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) - \frac{\pi}{2} = 2\arccos x - \frac{3\pi}{2}$.

4. Voici la courbe de f (on utilise la parité, et la fonction arcsin).



5. La figure ci-dessus donne directement les réponses, qu'on peut ensuite justifier : non, la fonction f n'est pas dérivable en 1 ni en -1 (par parité, la dérivabilité en un de ces points entraînerait la dérivabilité en l'autre), car la courbe présente des demi-tangentes verticales en ces points ; non, la fonction f n'est pas dérivable en 0, car la courbe présente deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents au point d'abscisse 0.

Justification.

En 1, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arcsin'(x) = +\infty$ et $f'(x) = 2\arcsin'(x)$. D'où

(d'après le théorème 2.1 p.45) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$, et la courbe de f admet en son point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale tournée vers *le bas* (on est à gauche du point 1).

En 0 : on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -2$, donc (toujours d'après le théorème 2.1 p.45) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'_g(0) = -2$.

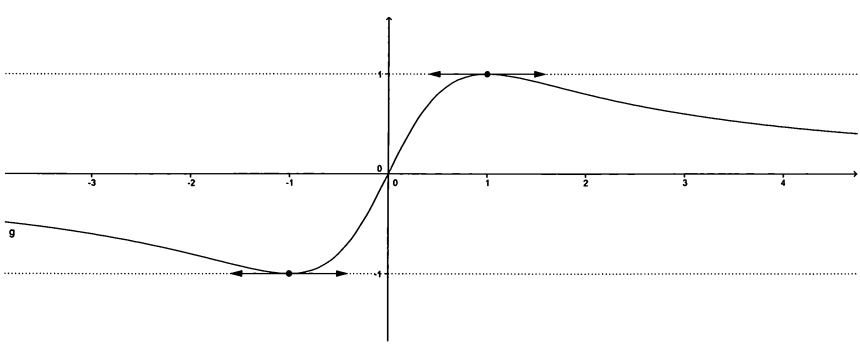
De même $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 2$, donc d'après le théorème 2.1 p.45 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'_d(0) = 2$. Donc $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, et f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3.7.

1. Soit $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée vaut :

$$g'(x) = \frac{2(x^2+1)-(2x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$g'(x)$ est du signe de $1-x^2$, nulle en ± 1, positive sur $]-1,1[$, négative en dehors ; on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, $g(1) = 1$, $g(-1) = -1$, donc on voit facilement, en dressant un tableau de variation par exemple, que $g(x)$ reste toujours entre -1 et 1.
Voici la courbe de g.



Puisque $f(x) = \arcsin(g(x))$, et comme l'ensemble de définition de arcsin est $[-1,1]$, on est sûr que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

De plus, on sait que la fonction arcsin dérivable sauf en -1 et en 1. La fonction f sera donc dérivable sauf pour les x de $\mathscr{D}_f$ qui sont tels que $g(x) = \pm 1$; or, on a (grâce à l'étude de g) $g(x) = 1 \iff x = 1$ et $g(x) = -1 \iff x = -1$. Donc pour $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{-1,1\}$, c'est-à-dire pour $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$, on est sûr que

f est dérivable en x. L'ensemble de dérivabilité de f contient donc $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$, mais on ne sait pas encore si ces deux ensembles coïncident (on aura la réponse après la question 6.).

Enfin, la fonction f est impaire, car la fonction arcsin l'est aussi ; en effet, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(-x)=\arcsin\left(\frac{2(-x)}{(-x)^2+1}\right)=\arcsin\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)=-\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$
$$f(-x)=-f(x).$$

2.
$$f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1-\big(g(x)\big)^2}}=\frac{\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}}$$
$$=\frac{\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}}{\sqrt{\dfrac{(x^2+1)^2-(2x)^2}{(x^2+1)^2}}}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\,\frac{\sqrt{(x^2+1)^2}}{\sqrt{x^4+2x^2+1-4x^2}}$$
$$=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)\sqrt{x^4-2x^2+1}}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)\sqrt{(x^2-1)^2}}$$
$$f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)|x^2-1|}.$$

En effet, $\sqrt{(x^2+1)^2}=|x^2+1|=x^2+1$, mais $\sqrt{(x^2-1)^2}=|x^2-1|=|1-x^2|$ car (x^2-1) n'est pas toujours positif. Finalement

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\,\frac{2}{1+x^2}.$$

Lorsque $1-x^2>0$, c'est-à-dire pour $x\in]-1,1[$, on a $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$.

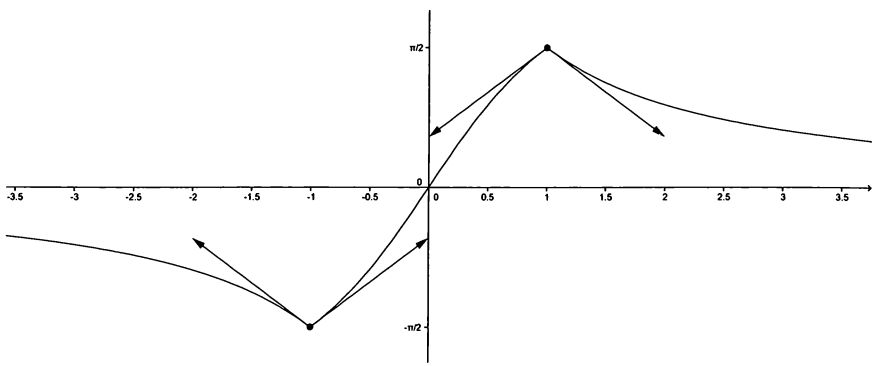
En revanche, pour $1-x^2<0$, c'est-à-dire pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, on a $f'(x)=\dfrac{-2}{1+x^2}$.

3. Pour $x\in]-1,1[$, on a $f'(x)=2\arctan'(x)$, donc il existe $C_1\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in]-1,1[$, on a $f(x)=2\arctan(x)+C_1$; mais en particulier pour $x=0$, on a $f(0)=0=2\arctan(0)+C_1$, donc $C_1=0$, et on a prouvé que pour tout $x\in]-1,1[$, on a $f(x)=2\arctan(x)$. Il reste à prouver que cette formule reste vraie pour $x=\pm1$; en fait il suffit de le prouver pour $x=1$, à cause du caractère impair des fonctions f et arctan. Or, $f(1)=\arcsin\left(\dfrac{2\cdot1}{1^2+1}\right)=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$ et on a bien $2\arctan(1)=2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$. (*On aurait aussi pu invoquer un argument de continuité.*)

4. De la même manière, pour $x > 1$, on a $f'(x) = -2\arctan'(x)$, donc il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a $f(x) = -2\arctan(x) + C_2$; mais en particulier pour $x \to +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0$, mais aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\arctan(x) + C_2 = -2\cdot\dfrac{\pi}{2} + C_2 = C_2 - \pi$, donc, par unicité de la limite $C_2 = \pi$, et on a prouvé que pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a $f(x) = \pi - 2\arctan(x)$.

   Notons que cette formule est encore valable pour $x = 1$, ce qu'on peut prouver soit par un calcul direct, soit par un argument de continuité.

5. Grâce aux deux formules des questions précédentes, et au caractère impair de f, on trace aisément la courbe de f.



6. La figure de la question précédente permet de voir directement que la réponse ne peut être que NON : la courbe de f présente en ses points d'abscisse 1 et -1 des points anguleux, car la dérivée à droite et la dérivée à gauche ne coïncident pas ; il suffit d'ailleurs de démontrer la non-dérivabilité en un de ces points, à cause du caractère impair de f. On a :

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2}{1+x^2} = 1$, donc (d'après le théorème 2.1 p.45) :

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$, et donc $f'_g(1) = 1$, tandis que

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{-2}{1+x^2} = -1$, donc (d'après le théorème 2.1 p.45) :

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$, et donc $f'_d(1) = -1$.

   Comme $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, f n'est pas dérivable en 1 (et donc pas non plus en -1).

   On peut maintenant compléter la réponse à la question 1. : l'ensemble de dérivabilité de f est donc exactement $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

Exercice 3.8. Comme l'ensemble de définition de la fonction arctan est $\mathbb{R}$, il est clair que $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$; d'autre part, f est clairement paire, on se contentera d'une étude sur $\mathbb{R}^+$.

f est évidemment croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de fonctions positives et croissantes, et on peut retrouver ce résultat par la dérivation :

$$f'(x) = \arctan x + x\arctan'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} > 0 \text{ pour } x > 0.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Étudions la branche infinie pour $x \to +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, donc la courbe admet, au voisinage de $+\infty$, une direction asymptotique, qui est celle de la droite $y = \frac{\pi}{2}x$.

Étudions maintenant $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}x\right)$; on a, en appliquant le résultat de l'exercice 3.2 :

$f(x) - \frac{\pi}{2}x = x\left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right) = -x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$; posons $u = \frac{1}{x}$; pour $x \to +\infty$, on a $u \to 0+$; on a donc

$f(x) - \frac{\pi}{2}x = -\frac{1}{u}\arctan u$.

Or, arctan est une fonction dérivable en 0, et $\arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$, donc en appliquant la définition de la dérivabilité, on a $\lim\limits_{u\to0} \frac{\arctan(u) - \arctan(0)}{u-0} = 1$, soit encore $\lim\limits_{u\to0} \frac{1}{u}\arctan(u) = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim\limits_{u\to0+} -\frac{\arctan(u)}{u} = -1$.

La droite d'équation D_1 : $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ est donc asymptote oblique à la courbe de f.

Pour déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à son asymptote oblique, on étudie le signe de $\Delta(x) = f(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - 1\right)$.

D'après ce qui précède, on a

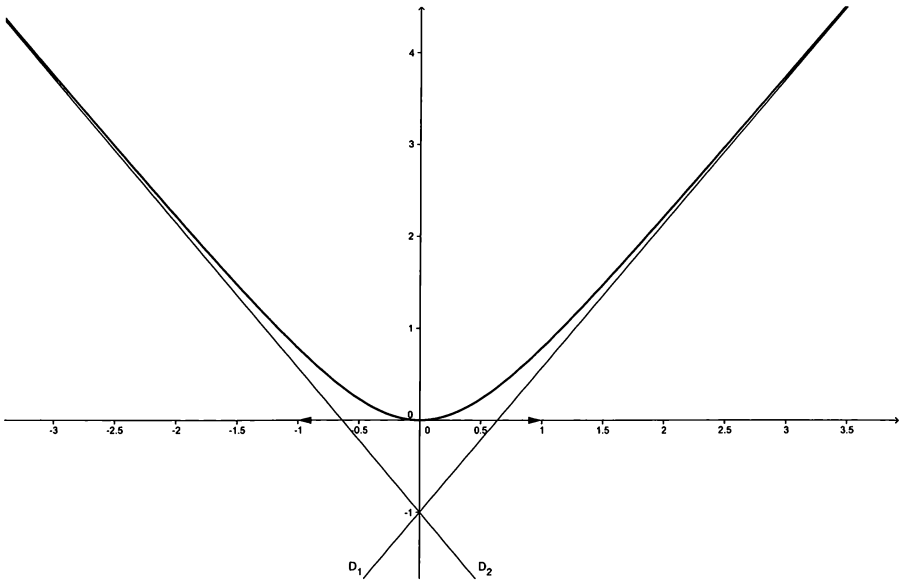
$\Delta(x) = -x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + 1$; or, il est clair, par exemple en regardant la courbe de la fonction arctan (voir p.64) [6], que pour tout $u > 0$, on a $0 < \arctan u < u$, donc $0 < \frac{\arctan u}{u} < 1$; en particulier, pour $x > 0$, on a

$0 < \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} < 1$, donc $1 - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, c'est-à-dire $\Delta(x) > 0$; la courbe de f est donc toujours au-dessus de son asymptote oblique, pour $x > 0$.

En utilisant la parité de f, il est certain que la droite D_2 symétrique de la droite D_1 par rapport à l'axe des ordonnées (D_2 : $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$) est aussi asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$, et la courbe est au-dessus de D_2 pour $x < 0$.

[6] On peut prouver ce résultat de façon élémentaire en faisant l'étude de la fonction $h : x \longmapsto \arctan x - x$: sa dérivée $h'(x) = \frac{-x^2}{1+x^2}$ est négative, on a $h'(0) = 0$, donc $h(x) < 0$ pour $x > 0$.

Voici l'aspect de la courbe de f :



Exercice 3.9.

1. Les fonctions intervenant dans la définition de la fonction f étant toutes dérivables, le domaine de dérivabilité coïncide bien évidemment avec l'ensemble de définition. Comme arctan est définie sur $\mathbb{R}$, la seule condition est que le dénominateur qui apparaît soit non nul, donc $x \neq \frac{1}{a}$; le domaine de dérivabilité est donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{a}\right\} = \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\cup \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$.

   On a $f(x) = \arctan(u(x))$ avec $u(x) = \dfrac{x+a}{1-ax}$;

   on trouve facilement $u'(x) = \dfrac{a^2+1}{(1-ax)^2}$, donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{(1+(u(x))^2} = \frac{\dfrac{a^2+1}{(1-ax)^2}}{1+\left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)^2} = \frac{a^2+1}{(1-ax)^2+(x+a)^2}$$

$$= \frac{a^2+1}{1+a^2x^2-2ax+x^2+a^2+2ax} = \frac{a^2+1}{(x^2+1)(a^2+1)} = \frac{1}{1+x^2}$$

2. On remarque que $f'(x) = \arctan'(x)$; il existe donc, sur chacun des intervalles qui forment l'ensemble de définition, une constante C telle que $f(x) = \arctan(x) + C$. Plus précisément :

- Il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$, $f(x) = \arctan(x) + C_1$;
- Il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$, $f(x) = \arctan(x) + C_2$.

Déterminons ces deux constantes.

Comme on a supposé que $a > 0$, on a $0 \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$, donc pour $x = 0$, on doit avoir à la fois $f(x) = \arctan\left(\frac{0+a}{1-a.0}\right) = \arctan(a)$, et $f(x) = \arctan(0) + C_1$, donc $C_1 = \arctan(a)$.

On a prouvé que

pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$, $f(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a)$.

Sur le deuxième intervalle $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$, le mieux est d'utiliser la limite à l'infini :

D'une part, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\frac{1}{a}$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(u(x)) = \arctan\left(-\frac{1}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right)$$
$$= -\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(a)\right) = \arctan(a) - \frac{\pi}{2}$$

(voir le résultat de l'exercice 3.2)

D'autre part, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, on a aussi :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) + C_2 = \frac{\pi}{2} + C_2$.

Donc $\frac{\pi}{2} + C_2 = \arctan(a) - \frac{\pi}{2}$ et finalement $C_2 = \arctan(a) - \pi$. On a prouvé que :

Pour tout $x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$, $f(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi$.

Finalement, la formule proposée $\arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a)$ n'est valable que pour les x tels que $x < \frac{1}{a}$.

3. On a vu que pour les x tels que $x > \frac{1}{a}$, on a :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi.$$

Maintenant, si on a $a < 0$, le résultat de la première question reste valable (l'ensemble de dérivabilité reste $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{a}\right\} = \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\cup \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$), tout le raisonnement du début de la deuxième question reste valable :

- Il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$, $f(x) = \arctan(x) + C_1$;
- Il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$, $f(x) = \arctan(x) + C_2$.

C'est la détermination des constantes qui n'est plus valable : en effet, 0 n'appartient plus au premier intervalle, mais au deuxième.

C'est donc pour $x \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$ qu'on a :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a).$$

En revanche, sur le premier intervalle, on a $f(x) = \arctan(x) + C_1$, et en utilisant la limite en $-\infty$, on trouve, avec un raisonnement et un calcul analogue que $C_1 = \pi$:

D'une part, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\frac{1}{a}$, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(u(x)) = \arctan\left(-\frac{1}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right)$$
$$= -\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan a\right) = \arctan a + \frac{\pi}{2}$$

(voir l'exercice 3.2 : pour $x < 0$, on a $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$)

D'autre part, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) + C_2 = -\frac{\pi}{2} + C_2$,

donc $-\frac{\pi}{2} + C_2 = \arctan(a) + \frac{\pi}{2}$ et finalement $C_2 = \arctan(a) + \pi$.

On a prouvé que, pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan(a) + \pi$.

Finalement, pour $a < 0$ la formule proposée

$$\arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a)$$

est valable pour les x tels que $x > \frac{1}{a}$.

Exercice 3.10.

1. On applique l'exercice précédent 3.9, avec $x = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{3}$; c'est la première formule qu'on peut utiliser, puisque $a = \frac{1}{3} > 0$ et $x < 3 = \frac{1}{a}$:

$$\arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a)$$

On a donc :

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Même démarche et même formule (puisque $\frac{1}{5} > 0$ et $2 < \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$) :

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}\right) = \arctan\frac{7}{9}.$$

Donc, puisque $8 > 0$ et $\frac{7}{9} < \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$) :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \arctan\left(\frac{7}{9}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$= \arctan\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}}\right)$$
$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{56+9}{72}}{\frac{72-7}{72}}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Pour calculer $\arctan 2 + \arctan 3$, il faut faire attention qu'ici $2 > \frac{1}{3}$ (et $3 > 0$), donc la formule à utiliser est $\arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi$, donc

$\arctan 2 + \arctan 3 = \arctan\left(\frac{2+3}{1-2\cdot 3}\right) + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

De même, on a $\arctan 2 + \arctan 5 = \arctan\left(\frac{2+5}{1-2\cdot 5}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{7}{9}\right) + \pi$; donc

$$\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \pi + \arctan\left(-\frac{7}{9}\right) + \arctan 8.$$

Cette fois c'est la formule $\arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a)$ qu'on peut utiliser, puisque $-\frac{7}{9} < \frac{1}{8}$ (avec $8 > 0$) :

$$\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \pi + \arctan\left(\frac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)8}\right)$$
$$= \pi + \arctan\left(\frac{\frac{-7+72}{9}}{\frac{9+56}{9}}\right)$$
$$\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \pi + \arctan 1 = \frac{5\pi}{4}$$

3. Toujours la même démarche ; puisque $\frac{1}{5} > 0$ et $\frac{1}{5} < 5 = \frac{1}{\frac{1}{5}}$:

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = 2\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = 2\arctan\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}\right)$$
$$= 2\arctan\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\right) = 2\arctan\left(\frac{5}{12}\right).$$

On recommence le procédé ; puisque $\frac{5}{12} > 0$ et $\frac{5}{12} < \frac{12}{5} = \frac{1}{\frac{5}{12}}$, on a :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}}\right)$$
$$= \arctan\left(\frac{\frac{10}{12}}{\frac{144-25}{12\cdot 12}}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right).$$

Pour finir, on applique la formule du 3. de l'exercice précédent ; puisque $\frac{-1}{239} > 0$ et $\frac{120}{119} > -239 = \frac{1}{-\frac{1}{239}}$ on a

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \arctan\frac{120}{119} + \arctan\left(-\frac{1}{239}\right)$$
$$= \arctan\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}\right)$$
$$= \arctan\left(\frac{120\cdot 239-119}{119\cdot 239+120}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

(en effet, $120\cdot 239-119 = (119\cdot 239+239)-119 = 119\cdot 239+(239-119) = 119\cdot 239+120$)

Exercice 3.11.

1. Il est évident que
   $\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x.$
   Cette relation est à rapprocher de la relation $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.
2. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$
   $= \frac{\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{4} = \frac{4}{4} = 1$
   Autre méthode :
   $$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x) = (e^x)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$$
   $$= e^x e^{-x} = 1.$$
3.

4.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\ &= \frac{\left(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-(x+y)}\right)+\left(e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-(x+y)}\right)}{4}\\ &= \frac{2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{ch}(x+y)\end{aligned}$$

5. Il suffit d'appliquer les résultats de 3. et 4. avec $x=y$:

   $\operatorname{sh}(2x)=\operatorname{sh}(x+x)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$

   et

   $\operatorname{ch}(2x)=\operatorname{ch}(x+x)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$; en combinant avec la formule du 2., on obtient deux formules complémentaires :

   - en utilisant $\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x-1$, on obtient $\operatorname{ch}(2x)=2\operatorname{ch}^2x-1$;
   - en utilisant $\operatorname{ch}^2x=\operatorname{sh}^2x+1$, on obtient $\operatorname{ch}(2x)=2\operatorname{sh}^2x+1$.

(Les formules des 2., 3., 4. et 5. sont à rapprocher de :
$\cos^2x+\sin^2x=1$; $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$; $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
et $\sin(2x)=2\sin x\cos x$; $\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$
On peut retenir qu'à chaque formule de trigonométrie classique correspond une formule analogue en trigonométrie hyperbolique, avec parfois, mais pas toujours, un signe qui change... Il convient donc de se méfier, on peut facilement faire des erreurs !)

Exercice 3.12.

1. Considérons les deux fonctions f et g respectivement définies par :

   $f(x)=\arctan(\operatorname{sh}x)$ et $g(x)=\arcsin(\operatorname{th}x)$.

   Tout d'abord, ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$; c'est évident pour f, car arctan et sh sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, c'est un peu plus compliqué pour g, car si th est définie sur $\mathbb{R}$, en revanche, l'ensemble de définition de arcsin est $[-1,1]$; mais on sait que $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $\operatorname{th}x\in]-1,1[$: cela permet donc d'assurer que $\arcsin(\operatorname{th}x)$ existe pour tout x. De plus, l'ensemble de dérivabilité de arcsin étant $]-1,1[$, on peut en plus affirmer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Étudions maintenant les dérivées de ces deux fonctions :

$$f'(x)=\frac{\operatorname{sh}'(x)}{1+\operatorname{sh}^2x}=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}x}$$

   (puisque $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$, on a $1+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x$)

$$g'(x)=\frac{\operatorname{th}'(x)}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}};$$

or, $\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$, donc

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{\text{ch}^2 x}}{\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2 x}}} = \frac{\sqrt{\text{ch}^2 x}}{\text{ch}^2 x}.$$

Mais on sait que $\text{ch}\, x > 0$ pour tout x, donc

$$g'(x) = \frac{\text{ch}\, x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}\, x} = f'(x).$$

Les fonctions f et g sont définies sur l'*intervalle* $\mathbb{R}$ et elles ont la même dérivée, elles sont donc égales à une constante près : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + C$. Mais pour $x = 0$, il est clair que $f(0) = 0 = g(0)$, donc $C = 0$ et on a bien $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui s'écrit

$$\arctan(\text{sh}\, x) = \arcsin(\text{th}\, x).$$

2. Considérons encore les deux fonctions f et g, définies *sur* $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par :
$f(x) = 2\,\text{argth}(\tan x)$ et $g(x) = \text{argth}(\sin 2x)$.
Comme l'ensemble de définition de la fonction argth est $]-1, 1[$, il est important que $\tan x$ et $\sin 2x$ soient dans cet intervalle, mais c'est le cas lorsque x décrit $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, puisque d'une part $\tan x$ décrit $]-1, 1[$, et d'autre part $2x$ décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin 2x$ décrit aussi $]-1, 1[$. Donc les fonctions f et g sont bien définies (et dérivables) sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.
Calculons $f'(x)$ et $g'(x)$:

$$f'(x) = 2\frac{\tan'(x)}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x(1-\tan^2 x)} = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2}{\cos 2x}$$

$$g'(x) = \frac{2\cos 2x}{1-\sin^2 2x} = \frac{2\cos 2x}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos 2x} = f'(x).$$

Ici aussi, f et g sont deux fonctions définies sur le même *intervalle* $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, et ont la même dérivée, elles sont donc égales à une constante près, constante qui ne peut être que nulle en considérant la valeur en 0.
Donc $f(x) = g(x)$, ce qu'on voulait démontrer :
Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ $\quad 2\,\text{argth}(\tan x) = \text{argth}(\sin 2x)$.

Exercice 3.13. Cet exercice est une suite de l'exercice 3.12 1.

1. On a vu lors de la résolution de l'exercice précédent que f est définie sur $\mathbb{R}$, et que $f'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}\, x}$; comme $\text{ch}\, x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est évidemment continue. Notons que f est aussi clairement impaire.

2. D'après le résultat de la question précédente, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.
   Or, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \arctan y = \dfrac{\pi}{2}$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(\operatorname{sh} x) = \dfrac{\pi}{2}$; comme f est impaire, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, et donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; f est donc bien à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. f admet donc une fonction réciproque (qu'on nous demande d'appeler g) définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque ; posons $y = \operatorname{sh} x$ et $z = \arctan y = f(x)$; on a y qui décrit $\mathbb{R}$ et z qui décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   On a

$$z = f(x) \iff \begin{cases} z = \arctan y \\ y = \operatorname{sh} x \end{cases} \iff \begin{cases} y = \tan z \\ x = \operatorname{argsh} y \end{cases} \iff x = \operatorname{argsh}(\tan z);$$

   or, par définition de la bijection réciproque g, $z = f(x) \iff x = g(z)$, donc $g(z) = \operatorname{argsh}(\tan z)$.
   On a donc, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \operatorname{argsh}(\tan x)$.

CHAPITRE 4

4. Corrigés des exercices sur le calcul intégral

Exercice 4.1.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (x^3 - 7x + 15)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^2}{2} + 15x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 15 = \frac{47}{4}\cdot$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^5\,\mathrm{d}x$; en posant $u(x) = x^2 + 1$, on se ramène à l'intégration d'une fonction du type $u'u^\alpha$:
   $I_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (2x)(x^2+1)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2^6}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}\cdot$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 (x+2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^2 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0\right) = \frac{16}{3}\cdot$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-\cos\frac{3\pi}{4} + \cos 0}{3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3}\cdot$

5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 (4x+2)(x^2+x-2)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (2x+1)(x^2+x-2)^2\,\mathrm{d}x$
$= 2\left[\dfrac{(x^2+x-2)^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\dfrac{0^3-(-2)^3}{3}\right) = \dfrac{16}{3}\cdot$

6. $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1} = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x$
$= \left[\dfrac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_0^1 = -2^{-1}+1^{-1} = -\dfrac{1}{2}+1 = \dfrac{1}{2}\cdot$

7. $I_7 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ((\tan^2 x+1)-1)\,\mathrm{d}x = \Big[\tan x - x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$
$= \left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)-\left(-1+\dfrac{\pi}{4}\right) = 2-\dfrac{\pi}{2}\cdot$

On aurait pu (dû ?) remarquer que la fonction $x \longmapsto \tan^2 x$ était paire et dire, en application de la proposition 4.16 p.88, que $I_7 = 2I_7'$ avec $I_7' = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$. Cela simplifiait un peu les calculs.

8. Cette question est un piège. Il est à peu près impossible de trouver une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{argsh}(x^3)$. En revanche, il est très simple de voir que cette fonction f est *impaire*. En application de la proposition 4.16 p.88, on peut conclure directement que :
$I_8 = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \operatorname{argsh}(x^3)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Exercice 4.2.

1. $J_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos x+\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$. Sachant que $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x+1)$, on a donc
$J_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1+\cos x+\frac{1}{2}(\cos 2x+1)\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{3}{2}+\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x$
$= \left[\dfrac{3x}{2}+\sin x+\dfrac{\sin 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\dfrac{3\pi}{2}+0+\dfrac{0}{4}\right)-\left(\dfrac{3\pi}{4}+1+\dfrac{0}{4}\right) = \dfrac{3\pi}{4}-1.$

2. $J_2 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos^2 x+\cos^4 x)\,\mathrm{d}x$; la linéarisation de $\cos^2 x$ a été faite à la question précédente, on applique la même méthode itérée pour linéariser $\cos^4 x$ (on pourrait aussi utiliser la formule d'Euler).

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(\cos 2x+1)\right)^2 = \frac{\cos^2 2x+2\cos 2x+1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\cos 4x+1)+2\cos 2x+1\right) = \frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\cdot$$

Donc

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos^2 x+\cos^4 x)\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left(1+\frac{\cos 2x+1}{2}+\frac{\cos 4x+4\cos 2x+3}{8}\right) dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{15}{8}+\cos 2x+\frac{\cos 4x}{8}\right) dx = \left[\frac{15x}{8}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{32}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \left(\frac{5\pi}{16}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{64}\right)-\left(\frac{-5\pi}{8}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{64}\right) \\
&= \frac{15\pi}{16}+\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

3. $J_3 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x+\sin^3 x)\,dx$; on pourrait linéariser $\sin^3 x$, mais ce serait maladroit, il est bien plus efficace de remarquer que $\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$, car un terme du type $\sin x\cos^2 x$ est, au signe près, de la forme $u'u^\alpha$.

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x+\sin^3 x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x(2+\cos^2 x)\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\,dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\sin x)\cos^2 x\,dx = \left[-2\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\frac{2\sqrt{2}}{8}}{3}\right)-\left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\frac{2\sqrt{2}}{8}}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

Ce résultat nul n'a rien de surprenant, et on aurait dû le trouver sans aucun calcul avec juste le raisonnement qu'on a fait à l'exercice précédent 4.1, question 8. (application de la proposition 4.16 p.88) : en effet, il est évident que la fonction $x \longmapsto \sin x+\sin^3 x$ *est impaire.*

Exercice 4.3.

1. $A_1(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$; le degré total de $A_1(x)$ est –2, donc il n'y a pas de partie entière.

   La décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle est de la forme $A_1(x) = \dfrac{a_1}{x+1}+\dfrac{b_1}{x+2}$.

   Pour trouver a_1, on multiplie l'égalité $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a_1}{x+1}+\dfrac{b_1}{x+2}$ par $x+1$ et « on fait » $x=-1$, on obtient $\dfrac{1}{x+2} = a_1+\dfrac{b_1(x+1)}{x+2}$ puis $a_1 = 1$;

Pour trouver b_1, on peut utiliser la même méthode, on peut aussi calculer la limite à l'infini de $xA_1(x)$ sous les deux formes : on trouve alors $0 = a_1 + b_1$ donc $b_1 = -1$.
Finalement, $A_1(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-1}{x+2}$, et sous cette forme, il est évident qu'une primitive de A_1 est la fonction $F_1(x) = \ln|x+1| - \ln|x+2|$.

2. $A_2(x) = \dfrac{x}{x^2+3x+2} = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$; le degré total de $A_2(x)$ est -1, donc il n'y a pas de partie entière.
La décomposition en éléments simples est de la forme $A_2(x) = \dfrac{a_2}{x+1} + \dfrac{b_2}{x+2}$.
Pour trouver a_2, on multiplie l'égalité $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a_2}{x+1} + \dfrac{b_2}{x+2}$ par $x+1$ et « on fait » $x = -1$, on obtient $\dfrac{x}{x+2} = a_2 + \dfrac{b_2(x+1)}{x+2}$ puis $a_2 = -1$;
Pour trouver b_2, on peut utiliser la même méthode, on peut aussi calculer la limite à l'infini de $xA_2(x)$ sous les deux formes : on trouve alors $1 = a_2 + b_2$ donc $b_2 = 2$.
Finalement, $A_2(x) = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{2}{x+2}$, et sous cette forme, il est évident qu'une primitive de A_2 est la fonction $F_2(x) = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2|$.

3. $A_3(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3x+2} = \dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)}$; le degré total de $A_3(x)$ est 0, donc il y a une partie entière, qui est une constante (un polynôme de degré 0).
La décomposition en éléments simples est de la forme $A_3(x) = C_3 + \dfrac{a_3}{x+1} + \dfrac{b_3}{x+2}$.
Pour trouver la partie entière de $A_3(x)$, on pourrait faire la division euclidienne du numérateur x^2 par le dénominateur x^2+3x+2, mais il est encore plus simple de comparer les limites à l'infini dans l'égalité ci-dessus : on obtient aussitôt $C_3 = 1$.
Pour trouver a_3, on multiplie l'égalité $\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)} = C_3 + \dfrac{a_3}{x+1} + \dfrac{b_3}{x+2}$ par $x+1$ et « on fait » $x = -1$, on obtient $\dfrac{x^2}{x+2} = a_3 + C_3(x+1) + \dfrac{b_3(x+1)}{x+2}$ puis $a_3 = 1$;
Pour trouver b_3, on multiplie l'égalité $\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)} = C_3 + \dfrac{a_3}{x+1} + \dfrac{b_3}{x+2}$ par $x+2$ et « on fait » $x = -2$, on obtient $\dfrac{x^2}{x+1} = b_3 + C_3(x+2) + \dfrac{a_3(x+2)}{x+1}$ puis $b_3 = -4$.
Finalement, $A_4(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-4}{x+2}$, et sous cette forme, il est évident qu'une primitive de A_2 est la fonction $F_2(x) = x + \ln|x+1| - 4\ln|x+2|$.

4. $A_4(x) = \dfrac{x^4}{x^2+4x+2} = \dfrac{x^4}{(x+1)(x+2)}$; le degré total de $A_4(x)$ est 2, donc il y a une partie entière, qui est un polynôme de degré 2.
La décomposition en éléments simples est de la forme

$$A_4(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{a_4}{x+1} + \frac{b_4}{x+2}.$$

Pour trouver la partie entière de $A_4(x)$, fait la division euclidienne du numérateur x^4 par le dénominateur x^2+3x+2 :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & & & & x^2+3x+2 \\ \cline{5-5} -(x^4 & +3x^3 & +2x^2) & & x^2-3x+7 \\ \cline{1-3} & -3x^3 & -2x^2 & & \\ & -(-3x^3 & -9x^2 & -6x) & \\ \cline{2-4} & & 7x^2 & +6x & \end{array}$$

(on peut calculer le reste mais ce n'est pas obligatoire, ni très utile). Maintenant, on sait que la partie entière est x^2-3x+7.

Pour trouver a_4, on multiplie l'égalité

$$\frac{x^4}{(x+1)(x+2)} = (\alpha x^2+\beta x+\gamma) + \frac{a_4}{x+1} + \frac{b_4}{x+2}$$

par $x+1$ et « on fait » $x=-1$, on obtient

$\dfrac{x^4}{x+2} = a_4 + (\alpha x^2+\beta x+\gamma)(x+1) + \dfrac{b_4(x+1)}{x+2}$ puis $a_4 = 1$;

Pour trouver b_4, on multiplie l'égalité

$$\frac{x^4}{(x+1)(x+2)} = (\alpha x^2+\beta x+\gamma) + \frac{a_4}{x+1} + \frac{b_4}{x+2}$$

par $x+2$ et « on fait » $x=-2$, on obtient

$\dfrac{x^4}{x+1} = b_4 + (\alpha x^2+\beta x+\gamma)(x+2) + \dfrac{a_4(x+2)}{x+1}$ puis $b_4 = -16$;

Finalement, $A_4(x) = x^2-3x+7+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-16}{x+2}$, et sous cette forme, il est évident qu'une primitive de A_2 est la fonction

$$F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x + \ln|x+1| - 16\ln|x+2|.$$

5. Il faut commencer par factoriser le dénominateur. Heureusement, on constate facilement que -1 est racine évidente, ce qui permet de factoriser le dénominateur en $x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x^2+5x+6) = (x+1)(x+2)(x+3)$.

Le degré total de $A_5(x)$ est -3, donc il n'y a pas de partie entière. La décomposition en éléments simples est de la forme

$$A_5(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a_5}{x+1} + \frac{b_5}{x+2} + \frac{c_5}{x+3}. \tag{5}$$

Pour trouver a_5, on multiplie (5) par $x+1$ et « on fait » $x=-1$, on trouve $a_5 = \frac{1}{2}$

Pour trouver b_5, on multiplie (5) par $x+2$ et « on fait » $x=-2$, on trouve $b_5=-1$
Pour trouver c_5, on multiplie (5) par $x+3$ et « on fait » $x=-3$, on trouve $c_5=\frac{1}{2}$
Finalement, $A_5(x)=\dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x+3}$, et sous cette forme, il est évident qu'une primitive de A_5 est la fonction $F_5(x)=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|$.

6. $A_6(x)=\dfrac{1}{x^3+x}=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$.
Le degré total de $A_6(x)$ est -3, donc il n'y a pas de partie entière.
Le trinôme x^2+1 est irréductible (ses racines i et $-$i ne sont pas réelles). Il y aura donc un élément simple de seconde espèce. La décomposition en éléments simples de $A_6(x)$ est donc de la forme :

$$(6)\qquad A_6(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a_6}{x}+\frac{b_6x+c_6}{x^2+1}.$$

Pour trouver a_6, on multiplie (6) par x et « on fait » $x=0$, on trouve $a_6=1$.
Pour trouver à la fois b_6 et c_6, on multiplie (6) par x^2+1 ; on trouve :
$\dfrac{1}{x}=b_6x+c_6+(x^2+1)\dfrac{a_6}{x}$; « on fait » alors $x=$ i. On trouve
$\dfrac{1}{\mathrm{i}}=b_6\mathrm{i}+c_6+0$, donc $c_6+b_6\mathrm{i}=-\mathrm{i}$. Par identification, on a donc $c_6=0$ et $b_6=-1$.
Finalement, $A_6(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-x}{x^2+1}$ et une primitive de A_6 est la fonction
$F_6(x)=\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
On n'est pas obligé de mettre des valeurs absolues autour de (x^2+1) *car cette quantité est toujours positive.*

7. $A_7(x)=\dfrac{x}{x^3-4x^2+5x-2}$.
On commence par factoriser le dénominateur ; 1 est racine évidente, donc $(x-1)$ se factorise : $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)^2(x-2)$.
La décomposition en éléments simples de $A_7(x)$ est donc de la forme :

$$(7)\qquad A_7(x)=\frac{x}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{a_7}{(x-1)^2}+\frac{b_7}{x-1}+\frac{c_7}{x-2}.$$

Pour trouver a_7, on multiplie (7) par $(x-1)^2$, on obtient
$\dfrac{x}{x-2}=a_7+b_7(x-1)+(x-1)^2\dfrac{c_7}{x-2}$, puis « on fait » $x=1$, on obtient $a_7=-1$.
Pour trouver c_7, on multiplie (7) par $x-2$ et « on fait » $x=2$, on trouve $c_7=2$.
Enfin, pour trouver b_7, le plus simple est d'utiliser la limite à l'infini de $xA_7(x)$. Cette limite est clairement nulle si on considère l'expression initiale de A_7, mais elle vaut b_7+c_7 si on considère la forme des éléments simples. On a donc $b_7+c_7=0$ et $b_7=-c_7=-2$. Finalement :

$A_7(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} + \dfrac{-2}{x-1} + \dfrac{2}{x-2}$ et une primitive de A_7 est la fonction

$F_7(x) = \dfrac{1}{x-1} - 2\ln|x-1| + 2\ln|x-2|$.

Exercice 4.4.

1. $F_1(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int f_1(x)\,dx$.

   Le dénominateur de $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ est un trinôme sans racine réelle (son discriminant vaut $\Delta = -4$. On écrit ce dénominateur sous forme canonique : $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$. On a donc :

   $$F_1(x) = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \arctan(x+1) + C.$$

   (*Normalement, on aurait dû faire le changement de variable $u = x+1$, mais ici, le résultat est particulièrement évident.*)

2. $F_2(x) = \displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{x+2}{(x+1)^2+1}\,dx$ (en utilisant la question précédente). On fait apparaître, au numérateur, la dérivée du dénominateur (à un coefficient multiplicatif près) : $x+2 = \frac{1}{2}(2x+2) + 1$, donc

   $$F_2(x) = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C.$$

   (*Il n'est pas utile de mettre des valeurs absolues autour de x^2+2x+2 car ce trinôme de discriminant négatif est toujours de même signe, toujours positif.*)

3. $F_3(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$; on essaie de faire apparaître une expression du type u^2+1 au dénominateur en factorisant 4 :

   $F_3(x) = \displaystyle\int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx$; on fait maintenant le changement de variable $u = \frac{x}{2}$, donc $dx = 2\,du$:

   $$F_3(x) = \frac{1}{4}\int \frac{2}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

4. $F_4(x) = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4}\,dx$. On combine les deux méthodes : faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur, puis un changement de variable.

   $$F_4(x) = \int \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

5. $F_5(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \int f_5(x)\,dx$.

   Le dénominateur se factorise en $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$; le trinôme x^2+x+1 n'a pas de racine réelle (ses racines complexes sont $j = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\bar{j}$). La

décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $f_5(x)$ est donc sous la forme :

$$(8) \qquad f_5(x) = \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}.$$

Pour trouver α, on multiplie (8) par $x-1$ et « on fait » $x=1$, on trouve $\alpha = \frac{1}{3}$;
Pour trouver simultanément β et γ, on multiplie (8) par x^2+x+1, puis « on fait » $x = \mathrm{j}$; comme j annule x^2+x+1, on obtient la relation $\dfrac{1}{\mathrm{j}-1} = \beta\mathrm{j}+\gamma$, ou encore $1 = (\beta\mathrm{j}+\gamma)(\mathrm{j}-1) = \beta\mathrm{j}^2 + (\gamma-\beta)\mathrm{j} - \gamma$; or, on sait que $\mathrm{j}^2 = -\mathrm{j}-1$ (puisque $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$: j annule x^2+x+1 par définition) ; donc on a
$1 = \beta(-\mathrm{j}-1) + (\gamma-\beta)\mathrm{j} - \gamma$ ou encore $1 = (\gamma-2\beta)\mathrm{j} - \beta - \gamma$.

β et γ étant des réels, par identification on trouve $\begin{cases}\gamma-2\beta=0\\-\beta-\gamma=1\end{cases}$ et donc $\beta = -\frac{1}{3}$ et $\gamma = -\frac{2}{3}$.

D'où $f_5(x) = \dfrac{\frac{1}{3}}{x-1} + \dfrac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}$.

Donc $F_5(x) = \displaystyle\int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

Le calcul de la première intégrale $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,\mathrm{d}x$ est immédiat, mais pour la deuxième, $\displaystyle\int \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$, on doit d'abord faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur :

$$\begin{aligned}\int \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{6}\int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{6}G(x) - \frac{1}{2}H(x)\end{aligned}$$

Traitons successivement chacune des deux primitives.

Très facilement : $G(x) = \displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+1) + C$.

Le calcul de $H(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ est beaucoup plus délicat ; on va mettre sous forme canonique le trinôme x^2+x+1 et factoriser le terme constant pour faire apparaître une quantité du type u^2+1 au dénominateur :

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right).$$

Donc on a :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

On pose alors $u = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, donc $du = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,dx$ et $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,du$.

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Finalement,

$$F_5(x) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

6. $F_6(x) = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$.

Le dénominateur se factorise ainsi :

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1);$$

Si $f_6(x) = \dfrac{x^2}{x^4-1} = \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$, cette fraction rationnelle admet une décomposition en éléments simples de la forme $f_6(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$ (il n'y a pas de partie entière, puisque le degré total de $f_6(x)$ est $2-4 = -2 < 0$).

On détermine a et b comme d'habitude, en multipliant par $(x-1)$ [resp. $(x+1)$] et en « faisant » $x = 1$ [resp. $x = -1$].

Successivement, $\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} = a + (x-1)g_6(x)$ donc $a = \frac{1}{4}$;

$\dfrac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} = b + (x+1)h_6(x)$ donc $b = -\frac{1}{4}$.

Ensuite, pour trouver simultanément c et d, on multiplie par (x^2+1) et on « fait » $x = \mathrm{i}$:

$\dfrac{x^2}{(x^2-1)} = cx + d + (x^2+1)j_6(x)$, donc $\dfrac{-1}{-2} = c\mathrm{i} + d$, d'où $c = 0$ et $d = \frac{1}{2}$.

Finalement, $f_6(x) = \dfrac{\frac{1}{4}}{x-1} + \dfrac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$, et facilement :

$$F_6(x) = \int f_6(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

7. $F_7(x) = \int \frac{x}{x^4-1}\,dx$; c'est la même démarche que pour 6. On a la même factorisation pour le dénominateur :

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1);$$

soit $f_7(x) = \frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$, sa décomposition en éléments simples est de la forme $f_7(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$ (il n'y a pas de partie entière, puisque le degré total de $f_7(x)$ est $1-4=-3<0$).

On détermine a et b, en multipliant par $(x-1)$ [resp. $(x+1)$] et en « faisant » $x=1$ [resp. $x=-1$].

Successivement, $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = a+(x-1)g_7(x)$ donc $a=\frac{1}{4}$;

$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = b+(x+1)h_7(x)$ donc $b=\frac{1}{4}$.

Enfin, pour trouver simultanément c et d, on multiplie par (x^2+1) et on « fait » $x=\mathrm{i}$:

$\frac{x}{(x^2-1)} = cx+d+(x^2+1)j_7(x)$, donc $\frac{\mathrm{i}}{-2} = c\mathrm{i}+d$, d'où $c=-\frac{1}{2}$ et $d=0$.

Finalement, $f_7(x) = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}$, et facilement :

$$F_7(x) = \int f_7(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C.$$

8. $F_8(x) = \int \frac{x^4+1}{x^5+x^3}\,dx$.

La factorisation du dénominateur est $x^5+x^3 = (x^2+1)x^3$, donc si $f_8(x) = \frac{x^4+1}{x^5+x^3} = \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}$, la fraction rationnelle $f_8(x)$ admet une décomposition en éléments simples de la forme :

$$f_8(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3}$$

On détermine a et b simultanément en multipliant par (x^2+1) et en « faisant » $x=\mathrm{i}$:

$\frac{x^4+1}{x^3} = ax+b+(x^2+1)g_8(x)$, donc $\frac{2}{-\mathrm{i}} = a\mathrm{i}+b$ et $a=2$, $b=0$.

On détermine e en multipliant par x^3 et en faisant $x=0$:

$\frac{x^4+1}{x^2+1} = e+xh_8(x)$, donc $e=1$. On peut trouver c en regardant la limite à l'infini de $xf_8(x)$: on a $\lim\limits_{x\to\infty} xf_8(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x(x^4+1)}{x^5+x^3} = 1$ et d'autre part $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3}\right) = a+c = 2+c$, donc $c=-1$.

Enfin, il ne reste plus que d à déterminer, on peut utiliser une valeur de la fonction $f_8(x)$, par exemple $f_8(1) = 1 = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{1} + \frac{d}{1} + \frac{e}{1} = 1-1+d+1$, donc $d=0$.

Finalement $f_8(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$ et

$$F_8(x) = \int f_8(x)\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+1) - \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$$

Exercice 4.5.

1. $G_1(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$; on suggère le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$; on a donc $x = 2\arctan u$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. D'autre part, on connaît la formule de trigonométrie classique : $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ avec justement cette valeur de u. Donc on a :

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{2}{1+u^2+1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int 1\,\mathrm{d}u = u + C \end{aligned}$$

donc

$G_1(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) + C.$

Remarque : On aurait pu trouver ce résultat remarquable en commençant par utiliser une formule de trigonométrie. On a $1+\cos x = 2\cos^2(\frac{x}{2})$, donc, en se rappelant que la dérivée de $\tan(\alpha x)$ peut aussi s'écrire $\dfrac{\alpha}{\cos^2(\alpha x)}$, on trouvait directement

$G_1(x) = \displaystyle\int \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\,\mathrm{d}x = \tan(\frac{x}{2}) + C.$

2. $G_2(x) = \displaystyle\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$. Le changement de variable à utiliser est, comme à la question précédente, $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, donc $x = 2\arctan u$ (ce changement de variable ne marche que sur $]-\pi,\pi[$).

On a donc $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. Comme à la question précédente, on utilise la formule classique $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

Donc

$$G_2(x) = \int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,du$$
$$= \int \frac{2}{2+2u^2-1+u^2}\,du = \int \frac{2}{3+u^2}\,du$$
$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,du = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+v^2}\,\sqrt{3}\,dv$$

on a posé $\frac{u}{\sqrt{3}} = v$, donc $du = \sqrt{3}\,dv$

$$G_2(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan v + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C$$
$$G_2(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C.$$

3. $G_3(x) = \int \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}\,dx$; le changement de variable suggéré est $u = \cos x$, donc $du = -\sin x\,dx$; il est pertinent de se rappeler la formule $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, qui permet de faire apparaître (au signe près) du au numérateur.

$$G_3(x) = \int \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{-2\cos x}{1+\cos x}(-\sin x\,dx)$$
$$= \int \frac{-2u}{1+u}\,du = \int \left(-2+\frac{2}{1+u}\right)du = -2u + 2\ln|1+u| + C$$
$$G_3(x) = -2\cos x + 2\ln(1+\cos x) + C.$$

4. $G_4(x) = \int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x(1-\cos x)^3}\,dx$. Pour préparer le changement de variable proposé : $u = \cos x$, donc $-\sin x\,dx = du$, on transforme le numérateur de la fraction.

$$G_4(x) = \int \frac{-(1-\cos^2 x)(-\sin x)}{\cos^2 x(1-\cos x)^3}\,dx = \int \frac{-(1-u^2)}{u^2(1-u)^3}\,du$$
$$= \int \frac{-(1+u)(1-u)}{u^2(1-u)^3}\,du = \int \frac{-(1+u)}{u^2(1-u)^2}\,du.$$

Soit la fraction rationnelle $F(u) = \dfrac{-(1+u)}{u^2(1-u)^2} = \dfrac{-(1+u)}{u^2(u-1)^2}$.

On sait qu'elle admet une décomposition du type

$$F(u) = \frac{-(1+u)}{u^2(u-1)^2} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u^2} + \frac{c}{u-1} + \frac{d}{(u-1)^2}.$$

Pour déterminer b et d, on procède comme d'habitude, on multiplie par u^2 [resp. par $(u-1)^2$] puis « on fait » $u=0$ [resp. $u=1$] :

$\dfrac{-(1+u)}{(u-1)^2} = au+b+\dfrac{cu}{u-1}+\dfrac{du}{(u-1)^2}$ donc $b=-1$;

$\dfrac{-(1+u)}{u^2} = \dfrac{(au+b)(u-1)}{u^2}+c(u-1)+d$ donc $d=-2$.

On trouve une relation entre a et c en considérant la limite à l'infini de $uF(u)$: puisque $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{-(1+u)u}{u^2(u-1)^2}=0$, on en déduit facilement que $a+c=0$. Enfin, on peut trouver une dernière relation entre a et c (et les autres nombres déjà déterminés), il suffit de choisir une autre valeur. Par exemple, on peut calculer $F(2)$ de deux façons différentes.

D'une part $F(2)=\dfrac{-(1+2)}{2^2(2-1)^2}=-\dfrac{3}{4}$;

D'autre part, $F(2)=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{2-1}+\dfrac{d}{(2-1)^2}=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4}+c-\dfrac{2}{1}$.

Donc $\begin{cases} a+c=0 \\ \frac{a}{2}+c-\frac{9}{4}=-\frac{3}{4} \end{cases}$ donc $c=-a$ et $-\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$, $a=-3$ et $c=3$.

Finalement, $F(u)=\dfrac{-3}{u}+\dfrac{-1}{u^2}+\dfrac{3}{u-1}+\dfrac{-2}{(u-1)^2}$

$$\begin{aligned} G_4(x) &= \int\left(\frac{-3}{u}+\frac{-1}{u^2}+\frac{3}{u-1}+\frac{-2}{(u-1)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= -3\ln|u|+\frac{1}{u}+3\ln|u-1|+\frac{2}{u-1}+C \\ G_4(x) &= -3\ln|\cos x|+\frac{1}{\cos x}+3\ln(1-\cos x)+\frac{2}{\cos x-1}+C. \end{aligned}$$

5. $G_5(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$.

On utilise le changement de variable $\mathrm{e}^x=u$, $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$, donc $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

$$G_5(x)=\int\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{u+1}{(u^2+1)u}\,\mathrm{d}u$$

On décompose cette dernière fraction rationnelle $F(u)=\dfrac{u+1}{(u^2+1)u}$ en éléments simples, de la forme $F(u)=\dfrac{u+1}{(u^2+1)u}=\dfrac{au+b}{u^2+1}+\dfrac{c}{u}$.

On trouve aisément (en multipliant par u et en faisant $u=0$) $c=1$, et en multipliant par u^2+1 avant de faire $u=\mathrm{i}$, $\dfrac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}}=a\mathrm{i}+b$, donc $b+\mathrm{i}a=1-\mathrm{i}$, $b=1$, $a=-1$ et donc finalement $F(u)=\dfrac{-u+1}{u^2+1}+\dfrac{1}{u}$.

D'où

$$G_5(x) = \int \frac{u+1}{(u^2+1)u}\,du = \int \left(\frac{-u+1}{u^2+1} + \frac{1}{u}\right) du$$
$$= \int \frac{-u}{u^2+1}\,du + \int \frac{1}{u^2+1}\,du + \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \arctan u + \ln|u| + C$$
$$G_5(x) = -\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + x + \arctan(e^x) + C.$$

6. $G_6(x) = \int \frac{dx}{e^{2x}\,\mathrm{sh}(2x)}$; on prépare le changement de variable $u = e^x$, $dx = \frac{1}{u}\,du$, en introduisant partout e^x :

$$G_6(x) = \int \frac{1}{(e^x)^2\,\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}}\,dx = \int \frac{2}{e^{4x}-1}\,dx$$
$$= \int \frac{2}{(u^4-1)u}\,du = \int \frac{2}{u(u-1)(u+1)(u^2+1)}\,du$$

Soit la fraction rationnelle $F(u) = \dfrac{2}{u(u-1)(u+1)(u^2+1)}$;

on sait que ses éléments simples sont de la forme :

$$F(u) = \frac{2}{u(u-1)(u+1)(u^2+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u-1} + \frac{c}{u+1} + \frac{du+e}{u^2+1}$$

On détermine comme d'habitude, a, b, c en multipliant respectivement par u, par $(u-1)$, par $(u+1)$ et en faisant respectivement $u = 0$, $u = 1$, $u = -1$, puis on détermine d et e en même temps en multipliant par (u^2+1) et en faisant $u = \mathrm{i}$.

$\dfrac{2}{(u-1)(u+1)(u^2+1)} = a + u\left[\cdots\cdots\right]$ donc $a = -2$;

$\dfrac{2}{u(u+1)(u^2+1)} = b + (u-1)\left[\cdots\cdots\right]$ donc $b = \frac{1}{2}$;

$\dfrac{2}{u(u-1)(u^2+1)} = c + (u+1)\left[\cdots\cdots\right]$ donc $c = \frac{1}{2}$;

$\dfrac{2}{u(u-1)(u+1)} = du + e + (u^2+1)\left[\cdots\cdots\right]$ donc $d\mathrm{i} + e = \dfrac{2}{\mathrm{i}(\mathrm{i}^2-1)} = \dfrac{2}{-2\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ donc $d = 1$ et $e = 0$.

Donc $F(u) = \dfrac{-2}{u} + \dfrac{\frac{1}{2}}{u-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{u+1} + \dfrac{u}{u^2+1}$,

et finalement :

$$\begin{aligned} G_6(x) &= \int \left(\frac{-2}{u} + \frac{\frac{1}{2}}{u-1} + \frac{\frac{1}{2}}{u+1} + \frac{u}{u^2+1} \right) \mathrm{d}u \\ &= -2\ln|u| + \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{2}\ln|u^2+1| + C \\ &= -2\ln|u| + \frac{1}{2}\ln|u^4-1| + C = -2\ln(\mathrm{e}^x) + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^{4x}-1| + C \\ G_6(x) &= -2x + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^{4x}-1| + C. \end{aligned}$$

Autre méthode : on aurait pu utiliser le changement de variable $v = \mathrm{e}^{4t}$ et économiser quelques calculs : on aurait $4t = \ln v$ donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}v}{v}$.

Alors

$$\begin{aligned} G_6(x) &= \int \frac{2}{\mathrm{e}^{4x}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{v-1}\,\frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{d}v}{v} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{v(v-1)}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{v-1}\,\mathrm{d}v - \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \right) \\ &= \frac{1}{2}\ln|v-1| - \frac{1}{2}\ln|v| + C = \frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^{4x}-1| - \frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^{4x}| + C \\ G_6(x) &= -2x + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^{4x}-1| + C. \end{aligned}$$

(même résultat, évidemment).

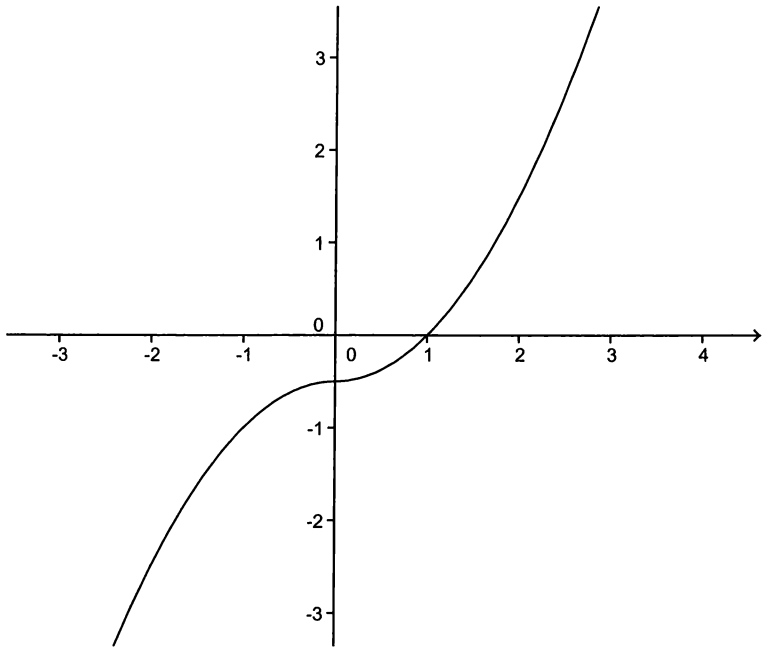
Exercice 4.6. On sait que $f(x) = x$ pour $x \geqslant 0$ et que $f(x) = -x$ pour $x \leqslant 0$; d'autre part, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ tout entier, qui sont toutes définies à une constante près.

Soit F la primitive de f qui s'annule en 1.

Sur $[0, +\infty[$, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$, donc on a $\displaystyle F(x) = \frac{x^2}{2} + C$; comme on veut que cette fonction s'annule en 1, on doit donc avoir $\displaystyle C = -\frac{1}{2}$. On a donc $\displaystyle F(0) = -\frac{1}{2}$; mais sur $]-\infty, 0]$, on a $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + K$; donc pour $x \leqslant 0$, on a $\displaystyle F(x) = -\frac{x^2}{2} + K$; mais comme $\displaystyle F(0) = -\frac{1}{2}$, on a $\displaystyle K = -\frac{1}{2}$.

Finalement, on a montré que la primitive F de la fonction f qui s'annule en 1 est la fonction définie par $\begin{cases} F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ F(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{pour } x \leqslant 0. \end{cases}$

Voici une représentation graphique de cette fonction F



Exercice 4.7.

1. $H_1(x) = \int \ln(x)\,dx$. On pose $u' = 1$, donc $u = x$ et $v = \ln x$ donc $v' = \dfrac{1}{x}$;

$$H_1(x) = \int \ln x\,dx = \left[x\ln x\right] - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C.$$

2. $H_2(x) = \int \arctan(x)\,dx$.

Même démarche, on pose $u' = 1$ et $v = \arctan x$ donc $u = x$ et $v' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

$$H_2(x) = \int \arctan x\,dx = \left[x\arctan x\right] - \int x\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$H_2(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

3. $H_3(x) = \int x\,\sin(x)\,dx$.

Ici, on pose $u = x$, $u' = 1$, $v' = \sin x$ donc $v = -\cos x$.

$$H_3(x) = \int x\sin x\,dx = \left[x(-\cos x)\right] - \int 1(-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

4. $H_4(x) = \int \arcsin(x)\,dx$.

Comme dans 1. et 2., $u' = 1$, $u = x$, $v = \arcsin x$, $v' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$H_4(x) = \int \arcsin x\,dx = \left[x \arcsin x\right] - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

5. $H_5(x) = \int x^2 \arctan(x)\,dx$

On commence par procéder comme pour 2., en dérivant arctan : on pose $u' = x^2$ donc $u = \dfrac{x^3}{3}$ et $v = \arctan x$ donc $v' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

$$H_5(x) = \int x^2 \arctan x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\arctan x\right] - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

Pour le calcul de cette dernière intégrale de la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$, on isole sa partie entière : $x^3 = (1+x^2)x - x$, donc

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Finalement :

$$H_5(x) = \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + C$$
$$H_5(x) = \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{\ln(1+x^2)}{6} + C.$$

6. $H_6(x) = \int (x^3 + x^2)e^{4x}\,dx$.

On pose naturellement $u = x^3 + x^2$, donc $u' = 3x^2 + 2x$, $v' = e^{4x}$ et $v = \dfrac{1}{4}e^{4x}$;

$$H_6(x) = \left[(x^3+x^2)\frac{e^{4x}}{4}\right] - \int (3x^2 + {}^2x)\frac{e^{4x}}{4}\,dx$$
$$= \frac{x^3+x^2}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}\int (3x^2 + 2x)e^{4x}\,dx$$

Pour calculer cette intégrale $\int (3x^2+2x)e^{4x}\,dx$, on pose encore $u_1 = 3x^2+2x$ donc $u_1' = 6x+2$, $v' = e^{4x}$ et $v = \frac{1}{4}e^{4x}$;

$$H_6(x) = \frac{x^3+x^2}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}\left(\left[(3x^2+2x)\frac{e^{4x}}{4}\right] - \int (6x+2)\frac{e^{4x}}{4}\,dx\right)$$
$$= \frac{x^3+x^2}{4}e^{4x} - \frac{3x^2+2x}{16}e^{4x} + \frac{1}{16}\int (6x+2)e^{4x}\,dx$$

une dernière intégration par parties du même type, avec $u_2 = 6x+2$ et le même v :

$$H_6(x) = \frac{4x^3+x^2-2x}{16}e^{4x} + \frac{1}{16}\left[(6x+2)\frac{e^{4x}}{4}\right] - \frac{1}{16}\int 6\frac{e^{4x}}{4}\,dx$$
$$= \frac{8x^3+2x^2-x+1}{32}e^{4x} - \frac{3}{32}\int e^{4x} = \frac{8x^3+2x^2-x+1}{32}e^{4x} - \frac{3}{128}e^{4x} + C$$
$$H_6(x) = \frac{32x^3+8x^2-4x+1}{128}e^{4x} + C.$$

7. $H_7(x) = \int x^2 \arctan(\sqrt{x})\,dx$

Comme toujours, puisqu'on ne connaît pas de primitive de $x \longmapsto \arctan(\sqrt{x})$, on dérive cette fonction.

On pose donc $u' = x^2$ avec $u = \frac{x^3}{3}$, et $v = \arctan(\sqrt{x})$, donc $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

$$H_7(x) = \left[\frac{x^3}{3}\arctan(\sqrt{x})\right] - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}\,dx$$
$$= \frac{x^3\arctan(\sqrt{x})}{3} - \frac{1}{6}\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x+1}\,dx.$$

Maintenant, pour cette dernière intégrale, le changement de variable $t = \sqrt{x}$ est logique : on a donc $x = t^2$ donc $dx = 2t\,dt$; d'où

$$H_7(x) = \frac{x^3\arctan(\sqrt{x})}{3} - \frac{1}{6}\int \frac{t^4\,t}{t^2+1}(2t)\,dt$$
$$= \frac{x^3\arctan(\sqrt{x})}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{t^6}{t^2+1}\,dt$$

On décompose cette dernière fraction en éléments simples :
$t^6 = (t^6 + t^4) - (t^4 + t^2) + (t^2 + 1) - 1$ donc

$$H_7(x) = \frac{x^3 \arctan(\sqrt{x})}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{t^6 + t^4 - t^4 - t^2 + t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}\,dt$$
$$= \frac{x^3 \arctan(\sqrt{x})}{3} - \frac{1}{3}\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$
$$= \frac{x^3 \arctan(\sqrt{x})}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \arctan t\right)$$
$$H_7(x) = \frac{x^3 \arctan(\sqrt{x})}{3} - \frac{x^2\sqrt{x}}{15} + \frac{x\sqrt{x}}{9} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{3}\arctan(\sqrt{x}) + C$$

8. $H_8(x) = \int x^3 \sin(2x)\,dx$.

Très naturellement, on pose $u = x^3$, $u' = 3x^2$, $v' = \sin 2x$, $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

$$H_8(x) = \int x^3 \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^3 \cos 2x\right] - \int -\frac{1}{2}\,3x^2 \cos 2x\,dx$$
$$= -\frac{x^3 \cos 2x}{2} + \frac{3}{2}\int x^2 \cos 2x\,dx$$
$$= -\frac{x^3 \cos 2x}{2} + \frac{3}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x\right] - \int \frac{1}{2}\,2x \sin 2x\,dx\right)$$

(*On a posé* $u_1 = x^2$, $u_1' = 2x$, $v_1' = \cos 2x$, $v_1 = \frac{1}{2}\sin 2x$)

$$H_8(x) = -\frac{x^3 \cos 2x}{2} + \frac{3x^2 \sin 2x}{4} - \frac{3}{2}\int x \sin 2x\,dx$$
$$= \frac{-2x^3 \cos 2x + 3x^2 \sin 2x}{4} - \frac{3}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right] - \int -\frac{1}{2}\,1 \cos 2x\,dx\right)$$

(*On a posé* $u_2 = x$, $u_2' = 1$, $v_2' = \sin 2x$, $v_2 = \frac{1}{2}\cos 2x$)

$$H_8(x) = \frac{-2x^3 \cos 2x + 3x^2 \sin 2x + 3x\cos 2x}{4} - \frac{3}{4}\int \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{-2x^3 \cos 2x + 3x^2 \sin 2x + 3x\cos 2x}{4} - \frac{3}{8}\sin 2x + C$$
$$H_8(x) = \frac{(-4x^3 + 6x)\cos 2x + (6x^2 - 3)\sin 2x}{8} + C.$$

9. $H_9(x) = \int x^2 \ln(x^6-1)\,dx$

On ne sait pas primitiver $\ln(x^6-1)$, donc on le dérivera... on pose donc $u' = x^2$, $u = \dfrac{x^3}{3}$, $v = \ln(x^6-1)$, $v' = \dfrac{6x^5}{x^6-1}$ et on obtient

$$\begin{aligned} H_9(x) &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x^6-1)\right] - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{6x^5}{x^6-1}\,dx \\ &= \frac{x^3\ln(x^6-1)}{3} - 2\int \frac{x^8}{x^6-1}\,dx. \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale $J(x) = \displaystyle\int \frac{x^8}{x^6-1}\,dx = \int F(x)\,dx$, on la décompose en éléments simples la fraction rationnelle $F(x)$ (ne pas oublier la partie entière).

$$F(x) = \frac{x^8}{x^6-1} = \frac{x^8-x^2+x^2}{x^6-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^6-1}\cdot$$

Le dénominateur de $F(x)$ se factorise en

$$\begin{aligned} x^6-1 &= (x^2-1)(x^4+x^2+1) = (x-1)(x+1)((x^4+2x^2+1)-x^2) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1). \end{aligned}$$

Donc la décomposition en éléments simples de $F(x)$ sera de la forme :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^8}{x^6-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^6-1} \\ &= x^2 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} + \frac{c'x+d'}{x^2-x+1}\cdot \end{aligned}$$

On va utiliser la parité de $F(x)$ pour diminuer les calculs :

$$\begin{aligned} F(x) = F(-x) &= x^2 + \frac{a}{-x-1} + \frac{b}{-x+1} + \frac{-cx+d}{x^2-x+1} + \frac{-c'x+d'}{x^2+x+1} \\ &= x^2 + \frac{-a}{x+1} + \frac{-b}{x-1} + \frac{-cx+d}{x^2-x+1} + \frac{-c'x+d'}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions de $F(x)$, et grâce à l'unicité de la décomposition en éléments simples, on obtient $b = -a$, $c' = -c$ et $d' = d$.

On détermine a en multipliant par $(x-1)$ et en faisant $x = 1$:

$\dfrac{x^8}{(x+1)(x^4+x^2+1)} = a + (x-1)[\ldots\ldots]$ donc $a = \frac{1}{6}$ (et $b = -\frac{1}{6}$).

On détermine c et d en multipliant par (x^2+x+1), puis en faisant $x = \mathrm{j}$, j étant une des deux racines $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ de x^2+x+1 ; en particulier, on a $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1 = 0$ donc $\mathrm{j}^2 = -\mathrm{j}-1$ et $\mathrm{j}^3 = 1$, donc $\mathrm{j}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{j}}$, et aussi $\bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$.

$\dfrac{x^8}{(x^2-1)(x^2-x+1)} = cx+d+(x^2+x+1)\big[\ldots\ldots\big]$; on a donc :

$$\frac{\mathrm{j}^8}{(\mathrm{j}^2-1)(\mathrm{j}^2-\mathrm{j}+1)} = c\mathrm{j}+d$$

$$\begin{aligned} c\mathrm{j}+d &= \frac{\mathrm{j}^2}{(-\mathrm{j}-2)(-2\mathrm{j})} = \frac{1}{\mathrm{j}(\mathrm{j}+2)(2\mathrm{j})} = \frac{1}{2\mathrm{j}^3+4\mathrm{j}^2} = \frac{1}{2+4\mathrm{j}^2} \\ &= \frac{(2+4\mathrm{j})}{(2+4\mathrm{j}^2)(2+4\mathrm{j})} = \frac{2+4\mathrm{j}}{4+8(\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)+16} = \frac{2+4\mathrm{j}}{20-8} = \frac{1}{3}\mathrm{j}+\frac{1}{6}\cdot \end{aligned}$$

Par identification, on a donc $c = \frac{1}{3}$ donc $c' = -\frac{1}{3}$ et $d = \frac{1}{6} = d'$.
Finalement,

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 + \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}}{x^2+x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}}{x^2-x+1} \\ &= x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\cdot\right) \end{aligned}$$

Sous cette forme, il est facile de primitiver $F(x)$ et donc on obtient :

$$\begin{aligned} H_9(x) &= \frac{x^3\ln(x^6-1)}{3} - 2\int F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3\ln(x^6-1)}{3} \\ &\qquad -2\int\left(x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\right) \\ H_9(x) &= \frac{x^3\ln(x^6-1)}{3} - \frac{2x^3}{3} \\ &\qquad +\frac{1}{3}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|+\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1)\right)+C \\ H_9(x) &= \frac{x^3(\ln(x^6-1)-2)}{3} \\ &\qquad +\frac{\ln|x-1|-\ln|x+1|+\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1)}{3}+C. \end{aligned}$$

Exercice 4.8.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+3}\,dt$. On utilise le changement de variable $u = e^t$, donc $t = \ln u$ et $dt = \frac{1}{u}\,du$; pour $t = 0$, on a $u = e^0 = 1$ et pour $t = 1$, on a $u = e^1 = e$. Donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \frac{1}{u+3}\frac{1}{u}\,du = \int_1^e \left(\frac{\frac{1}{3}}{u} + \frac{-\frac{1}{3}}{u+3}\right) du \\ &= \left[\frac{1}{3}(\ln|u| - \ln|u+3|)\right]_1^e = \frac{1}{3}(\ln e - \ln(e+3) - \ln 1 + \ln 4) \\ I_1 &= \frac{1-\ln(e+3)+2\ln 2}{3} \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

On suggère donc de poser $x = 2+\cos t$ (ce n'était pas facile à deviner) donc $dx = -\sin t\,dt$; notons qu'on choisira donc $t = \arccos(x-2)$ (on a bien, pour $x \in [2,3]$, $x-2 \in [0,1]$, et $\arccos(x-2)$ a bien un sens) ; pour $x = 2$, on a $2+\cos t = 2$, donc $\cos t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, tandis que pour $x = 3$, $\cos t = 1$ donc $t = 0$.

Préparons le changement de variable en calculant la quantité sous le radical avec la méthode de la forme canonique :

$-x^2+4x-3 = -(x^2-4x+3) = -((x-2)^2-1) = 1-(x-2)^2 = 1-\cos^2 t = \sin^2 t$; comme $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin t \geqslant 0$, de sorte que

$\sqrt{-x^2+4x-3} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$.

On a donc

$$I_2 = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(-\sin t)}{\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Le même changement de variable pouvait aussi permettre de calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} I_2' &= \int_2^3 \sqrt{-x^2+4x-3}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin t(-\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 0 \\ I_2' &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; c'est presque le même que le précédent, en plus simple ; pour changer, on va poser $x = \sin t$, donc $t = \arcsin x$ (comme $x \in [0,1]$, il n'y a pas de

problème de définition de t). On a donc $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, et pour $x = 0$, $t = 0$ alors que pour $x = 1$, on a $t = \frac{\pi}{2}$; notons que $\cos t \geqslant 0$ pour les t qui nous intéressent ($t \in [0, \frac{\pi}{2}]$). On a

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 0 \\ I_3 &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

On retrouve évidemment l'aire d'un quart de disque de rayon 1, et l'interprétation géométrique en termes d'aire correspond justement à l'aire de ce quart de disque.

Exercice 4.9.

1.

$$\begin{aligned} I(x) + J(x) &= \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} I(x) - J(x) &= \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On remarque que le numérateur de cette fraction n'est rien d'autre, au signe près que la dérivée du dénominateur : si $D(x) = \sin x + \cos x$, et $N(x) = \sin x - \cos x$, on a $D'(x) = \cos x - \sin x = -N(x)$, donc

$$I(x) - J(x) = -\ln|\sin x + \cos x| + C.$$

3. Puisque $I(x) = \frac{1}{2}\Big((I(x)+J(x)) + (I(x)-J(x))\Big)$, on a
$I(x) = \frac{1}{2}\,(x - \ln|\sin x + \cos x|) + C$.
De même, $J(x) = \frac{1}{2}\,(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C$.

Exercice 4.10.

1. Dans l'expression $F(t) = \displaystyle\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$, on va isoler un terme dont on peut calculer la primitive : si $v' = \dfrac{t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$, on peut prendre $v = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{t^2+1}$ (on a utilisé le fait que la dérivée de $\frac{1}{g}$ est $-\frac{g'}{g^2}$ avec ici $g = t^2+1$). Donc si on prend aussi $u = t$, $u' = 1$, on est prêt à faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} F(t) &= \int t\,\frac{t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2+1}\right] - \int 1\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C. \end{aligned}$$

2. On peut écrire

$$G(t) = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - F(t),$$

donc

$$G(t) = \arctan t - \left(-\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t\right) + C = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C.$$

Dans cet exercice nous avons appliqué une méthode qui peut se généraliser pour calculer des primitives d'éléments simples de seconde espèce avec une puissance supérieure ou égale à 2.

Exercice 4.11.

1. $J_1 = \displaystyle\int_0^4 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+8}} = \int_0^4 f_1(x)\,\mathrm{d}x$

On commence par chercher la forme canonique du trinôme intervenant au dénominateur (sous le radical) :

$-x^2+2x+8 = -(x^2-2x)+8 = -((x-1)^2-1)+8 = 9-(x-1)^2$.

On factorise alors 9 sous le radical :

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{9\left(1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2\right)}} = \frac{x}{3\sqrt{1-u^2}} \text{ en posant } u = \frac{x-1}{3};$$

On fait alors le changement de variable suivant dans l'intégrale J_1 :

$u = \sin t = \frac{x-1}{3}$ donc $x = 1+3\sin t$; on prend $t = \arcsin u = \arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right)$, de sorte que $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos t \geqslant 0$; on a alors $\mathrm{d}x = 3\cos t\,\mathrm{d}t$, et pour $x = 0$, on a $\sin t = -\frac{1}{3}$ donc

$t = -\arcsin(\frac{1}{3})$, tandis que pour $x = 4$, on aura $3\sin t = 3$ donc $t = \frac{\pi}{2}$. Donc

$$J_1 = \int_0^4 \frac{x}{3\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}}\,dx = \int_{-\arcsin(\frac{1}{3})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+3\sin t}{3\sqrt{1-\sin^2 t}}(3\cos t)\,dt$$

$$= \int_{-\arcsin(\frac{1}{3})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+3\sin t}{3\cos t}(3\cos t)\,dt = \int_{-\arcsin(\frac{1}{3})}^{\frac{\pi}{2}} (1+3\sin t)\,dt$$

$$= \Big[t - 3\cos t\Big]_{-\arcsin(\frac{1}{3})}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 3\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 3\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}.$$

2. $J_2 = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}\,dx$; clairement, le changement de variable à essayer est $u = e^x$, avec directement $e^x\,dx = du$. Pour $x = \ln 2$, $u = 2$ et pour $x = \ln 5$, $u = 5$. Donc

$$J_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}\,e^x\,dx = \int_2^5 \frac{1}{(3+u)\sqrt{u-1}}\,du.$$

À nouveau, il semble logique d'essayer le changement de variable $v = \sqrt{u-1}$, donc $u = 1+v^2$, $dv = \dfrac{1}{2\sqrt{u-1}}\,du$; pour $u = 2$, on a $v = 1$ et pour $u = 5$, on a $v = 2$:

$$J_2 = \int_2^5 \frac{2}{3+u}\,\frac{1}{2\sqrt{u-1}}\,du = \int_1^2 \frac{2}{3+1+v^2}\,dv = \int_1^2 \frac{2}{4+v^2}\,dv.$$

On fait apparaître un $1+w^2$ au dénominateur :

$$J_2 = \int_1^2 \frac{2}{4\left(1+\left(\frac{v}{2}\right)^2\right)}\,dv = \int_1^2 \frac{1}{1+\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,\frac{1}{2}\,dv.$$

Un dernier petit changement de variable : $w = \frac{v}{2}$, $\frac{1}{2}\,dv = dw$, $v = 1 \longrightarrow w = \frac{1}{2}$, $v = 2 \longrightarrow w = 1$:

$$J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+w^2}\,dw = \Big[\arctan w\Big]_{\frac{1}{2}}^1 = \arctan 1 - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$J_2 = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

3. $J_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx$; cet exemple est plus simple que le précédent ; il suffit de poser $\sqrt{x} = u$, donc $x = u^2$, $dx = 2u\,du$; pour $x = 0$, $u = 0$ et pour $x = 1$, $u = 1$.

$$J_3 = \int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2+u}\,2u\,du = \int_0^1 \frac{2u+4-4}{2+u}\,du$$
$$= \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{u+2}\right) du = \Big[2u - 4\ln|u+2|\Big]_0^1$$
$$J_3 = 2 - 4\ln 3 + 4\ln 2.$$

4. $J_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$; c'est exactement comme à l'exercice précédent : $\sqrt{x} = u$, donc $x = u^2$, $dx = 2u\,du$; pour $x = 0$, $u = 0$ et pour $x = 1$, $u = 1$:

$$J_4 = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{(1+u^2)u}{}\,2u\,du = 2\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= 2\Big[\arctan u\Big]_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$
$$J_4 = \frac{\pi}{2}.$$

5. $J_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,dx$; on essaie logiquement d'introduire le changement de variable $u = \sqrt{1+\sin x}$; pour $x = 0$, on a $u = 1$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $u = \sqrt{2}$; on a aussi $\sin x = u^2 - 1$, donc on prend $x = \arcsin(u^2 - 1)$ ($u^2 - 1$ varie entre 0 et 1, il n'y a pas de problème de définition), avec

$$dx = \frac{2u}{\sqrt{1-(u^2-1)^2}}\,du = \frac{2u}{\sqrt{2u^2-u^4}}\,du = \frac{2}{\sqrt{2-u^2}}\,du \text{ ; donc}$$

$$J_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u}\,\frac{2}{\sqrt{2-u^2}}\,du.$$

On essaie maintenant le changement de variable $v = u^2$ (qui va marcher grâce à la présence du facteur $\frac{1}{u}$) : on a donc $2u\,du = dv$, et pour $u = 1$, $v = 1$ et pour $u = \sqrt{2}$, $v = 2$;

Cette fois, c'est le changement de variable $w=\sqrt{2-v}$ qui va permettre de continuer : $\mathrm{d}w=\dfrac{-1}{2\sqrt{2-v}}\,\mathrm{d}v$ et $v=2-w^2$; pour $v=1$, on a $w=1$ et pour $v=2$, on a $w=0$;

$$J_5=\int_1^2\frac{-2}{v}\,\frac{-1}{2\sqrt{2-v}}\,\mathrm{d}v=\int_1^0\frac{-2}{2-w^2}\,\mathrm{d}w=\int_0^1\frac{-2}{(w-\sqrt{2})(w+\sqrt{2})}\,\mathrm{d}w.$$

Il n'y a plus qu'à décomposer en éléments simples cette fraction rationnelle

$$F(w)=\frac{-2}{(w-\sqrt{2})(w+\sqrt{2})}=\frac{a}{w-\sqrt{2}}+\frac{b}{w+\sqrt{2}}.$$

On détermine a en multipliant par $(w-\sqrt{2})$ et en faisant $w=\sqrt{2}$, on trouve $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de même on trouve $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc

$$J_5=\int_0^1\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{w-\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{w+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}w=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln|w+\sqrt{2}|-\ln|w-\sqrt{2}|\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$J_5=\frac{2}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

(puisque $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=(\sqrt{2}+1)^2$.)

Exercice 4.12.

1. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$; on fait le changement de variable indiqué : $u=\frac{\pi}{4}-x$, donc $x=\frac{\pi}{4}-u$ et $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$, pour $x=0$, on a $u=\frac{\pi}{4}$ et pour $x=\frac{\pi}{4}$, $u=0$; donc

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)(-\mathrm{d}u)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)\mathrm{d}u.$$

On applique la formule $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan u}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan u}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{1+\tan u+1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u$$

et on a obtenu ce qu'on voulait démontrer.

2. Il suffit de continuer le calcul :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1+\tan u))\, du$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\, du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)\, du = \frac{\pi \ln 2}{4} - I$$

(car la variable d'intégration est muette dans
$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)\, du$.)
Donc $2I = \frac{\pi \ln 2}{4}$ et

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

CHAPITRE 5

5. Corrigés des exercices sur les équations différentielles

Exercice 5.1.

(E) $$y' - 4y = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3$$

1. On se doute qu'un polynôme solution de cette équation doit être de degré 3 ; on cherche donc si une fonction polynôme du type $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ peut être solution de (E). On a $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, et on peut calculer

$$p'(x) - 4p(x) = (3ax^2 + 2bx + c) - 4(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$
$$= -4ax^3 + (3a - 4b)x^2 + (2b - 4c)x + (c - 4d)$$

de sorte que p est solution de (E) si et seulement si

$$p'(x) - 4p(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3$$
$$\iff -4ax^3 + (3a - 4b)x^2 + (2b - 4c)x + (c - 4d) = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3.$$

Par identification, on obtient que p est solution si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} -4a = 4 \\ 3a - 4b = -15 \\ 2b - 4c = 2 \\ c - 4d = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{-15+3}{-4} = 3 \\ c = \dfrac{2-6}{-4} = 1 \\ d = \dfrac{-3-1}{-4} = 1. \end{cases}$$

Finalement, on a prouvé qu'il existe une unique fonction polynôme de degré 3 vérifiant (E), c'est p définie par

$$p(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

2. (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation sans second membre associée à (E) est bien sûr (E') : $y' - 4y = 0$. On sait résoudre depuis la terminale ce genre d'équation, ses solutions sont les fonctions de la forme $y = \lambda e^{4x}$. (Si on n'a pas vu spécifiquement ce type d'équation on écrit (E') sous la forme $y' = 4x$ et on dit qu'une primitive de la fonction constante $x \mapsto 4$ est la fonction $x \mapsto 4x$).
3. Les solutions de (E) sont la somme d'une solution particulière de (E) (on prendra la fonction p), et de la solution générale de (E'). Donc ce sont les fonctions de la forme :
$$y = -x^3 + 3x^2 + x + 1 + \lambda e^{4x}.$$
4. La solution particulière de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = -2$ est du type $y = -x^3 + 3x^2 + x + 1 + \lambda e^{4x}$, et on doit avoir $-2 = -0^3 + 3.0^2 + 0 + 1 + \lambda e^0 = 1 + \lambda$, donc $\lambda = -3$. Finalement, la fonction cherchée est
$$y = -x^3 + 3x^2 + x + 1 - 3e^{4x}.$$

Exercice 5.2.

1. Soit (E) : $y' - \dfrac{3}{x} y = x$; c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre ; son équation sans second membre associée est l'équation (E') : $y' - \dfrac{3}{x} y = 0$; comme une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{x}$ est la fonction $x \longmapsto 3\ln|x|$, la solution générale de (E'), sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, est $y = \lambda e^{3\ln|x|} = \lambda x^3$.
On applique la méthode de la variation de la constante : on cherche les fonctions solutions de (E) sous la forme $y = \lambda(x)x^3$; on a donc $y' = \lambda'(x)x^3 + 3\lambda(x)x^2$, et une fonction y sous cette forme est solution de (E) si et seulement si :
$$\begin{aligned} y' - \frac{3}{x} y = x &\iff \lambda'(x)x^3 + 3\lambda(x)x^2 - \frac{3}{x}\left(\lambda(x)x^3\right) = x \\ &\iff \lambda'(x)x^3 = x \text{ (les termes en } \lambda(x) \text{ disparaissent, c'est normal)} \\ &\iff \lambda'(x) = \frac{1}{x^2} \iff \lambda(x) = -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$
Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme
$$y = \left(-\frac{1}{x} + C\right)x^3 = -x^2 + Cx^3.$$

Remarquons que ces solutions s'écrivent bien sous la forme de la somme de la solution générale (Cx^3) de (E') et d'une solution particulière ($-x^2$) de (E). Si nous avions « deviné » que $x \longmapsto -x^2$ était une solution particulière de (E), il n'aurait pas été utile d'utiliser cette méthode de la variation de la constante.

Les solutions qu'on a trouvées, en application de la théorie générale, ne sont a priori valables que sur un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. On peut certes prolonger ces solutions à $\mathbb{R}$ tout entier, mais ce qu'on obtient n'est alors pas vraiment une solution de (E), puisque 0 est une valeur « interdite ».

2. Soit f la solution de (E) vérifiant la c.i. (1,3). Il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f(x) = -x^2 + Cx^3$. On a donc en particulier $3 = f(1) = -1^2 + C.1^3$, donc $C = 4$ et la solution cherchée est donc f définie par $f(x) = -x^2 + 4x^3$.

Exercice 5.3.

1. (E) $y' - \left(\frac{2}{x^2}\right)y = 0$; $I =]0,+\infty[$.

   (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, sans second membre. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{2}{x^2}$ étant la fonction $x \longmapsto -\frac{2}{x}$, les solutions de (E) sont les fonctions du type $y = \lambda e^{-\frac{2}{x}}$. Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, on aurait obtenu la même forme de solutions.

2. (E) $y' = \frac{y-2}{x-1}$; a) $I =]-\infty,1[$; b) $I =]1,+\infty[$.

   Cette équation est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables ; on commencera à traiter les deux cas d'intervalles $]-\infty,1[$ ou $]1,+\infty[$ simultanément.

   Pour séparer les variables, il suffit d'écrire :

   (E) : $\frac{y'}{y-2} = \frac{1}{x-1}$, ou encore $\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x-1}$. Ceci n'est possible que pour $y \neq 2$, et on peut remarquer que la fonction constante $y = 2$ est une solution particulière de (E) ; donc lorsque $y \neq 2$, on peut poursuivre le calcul.

   On intègre, et on trouve successivement :

   $\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{x-1} \iff \ln|y-2| = \ln|x-1| + C$; passant aux exponentielle, on trouve

   $e^{\ln|y-2|} = e^{\ln|x-1|+C}$, ou encore $|y-2| = |x-1|e^C$; on peut écrire ceci sous la forme $y-2 = \lambda(x-1)$, en posant $\lambda = \pm e^C$; on peut aussi autoriser $\lambda = 0$, car dans ce cas on retrouve la solution constante $y = 2$ vue plus haut.

   Finalement, on a montré que, sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = 2 + \lambda(x-1)$.

3. (E) : $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$; $I =]0,+\infty[$.

   (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

On met (E) sous la forme $y' - \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,y = \dfrac{-2x}{x(1+x^2)}$. L'équation sans second membre associée à (E) est l'équation (E') : $y' - \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,y = 0$.

Commençons par résoudre (E'). On doit chercher une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$; pour cela on décompose cette fraction rationnelle en éléments simples, qui seront de la forme $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$; comme f est impaire, on est sûr que $c = 0$, mais on le retrouvera de toutes façons.

On trouve a en multipliant par x et en faisant $x = 0$, on trouve $a = -1$;

On trouve b (et on retrouvera $c = 0$) en multipliant par (x^2+1) et en faisant $x = \mathrm{i}$: on obtient d'abord

$\dfrac{x^2-1}{x} = bx + c + (x^2+1)\dfrac{a}{x}$, donc $\dfrac{-2}{\mathrm{i}} = b\mathrm{i} + c$, d'où $b = 2$ et $c = 0$.

Finalement on a $f(x) = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2x}{x^2+1}$, et une primitive de f sur I est la fonction F définie par

$$F(x) = \ln(x^2+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right).$$

Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme $y = \lambda \mathrm{e}^{F(x)} = \lambda\dfrac{x^2+1}{x} = \lambda g(x)$ (on a posé $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$; g est une solution particulière de (E')).

Il n'est guère possible de trouver une solution évidente de (E), on appliquera donc la méthode de variation de la constante.

On cherche les solutions de (E) sous la forme $y = \lambda(x)g(x) = \lambda(x)\dfrac{x^2+1}{x}$. On a alors $y' = \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)$. Une fonction y sous cette forme est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
y' - \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,y = \frac{-2x}{x(1+x^2)}
&\iff \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x) - \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,\lambda(x)g(x) = \frac{-2x}{x(1+x^2)} \\
&\iff \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)\underbrace{\left(g'(x) - \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,g(x)\right)}_{=0 \text{ car } g \text{ solution de (E')}} = \frac{-2x}{x(1+x^2)} \\
&\iff \lambda'(x)\frac{x^2+1}{x} = \frac{-2x}{x(1+x^2)} \iff \lambda'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \\
&\iff \lambda(x) = \frac{1}{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

(on a reconnu une forme $-\frac{u'}{u^2}$, dérivée de $\frac{1}{u}$).
Donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y=\left(\frac{1}{x^2+1}+C\right)\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{x}+C\frac{x^2+1}{x}.$$

On voit donc, a posteriori, que $x\longmapsto\frac{1}{x}$ était une solution particulière de l'équation (E). Ce n'était pas facile à prévoir.

4. (E) : $y'-\dfrac{y}{x^2-1}=1$; a) $I=]-1,1[$; b) $I=]1,+\infty[$; c) $I=]-\infty,-1[$.
(E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire. On essaiera de résoudre cette équation simultanément sur les trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$, en distinguant les cas le plus tard possible.
L'équation sans second membre associée à (E) est (H) : $y'-\dfrac{1}{x^2-1}y=0$.
Commençons par résoudre (H).
On doit chercher une primitive de la fonction

$$f\ :\ x\longmapsto\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right);$$

une primitive de f est donc F définie par

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)=\ln\left(\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\right).$$

Les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme $y=\lambda\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}=\lambda g(x)$ avec $g(x)=\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}$, g est une solution de (H). Sur l'intervalle $]-1,1[$, on peut prendre $g(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ alors que sur les deux autres intervalles, on prendra $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; mais pour l'instant on continue à traiter les trois cas simultanément en conservant les valeurs absolues.
On ne voit malheureusement pas de solution simple de (E), on applique donc la méthode de la variation de la constante.
On cherche les solutions de (E) sous la forme $y=\lambda(x)g(x)$, donc $y'=\lambda'(x)g(x)+\lambda(x)g'(x)$; une fonction de ce type est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned}y'-\frac{1}{x^2-1}y=1 &\iff \lambda'(x)g(x)+\lambda(x)g'(x)-\frac{1}{x^2-1}\lambda(x)g(x)=1\\ &\iff \lambda'(x)g(x)+\lambda(x)\underbrace{\left(g'(x)-\frac{1}{x^2-1}g(x)\right)}_{=0\text{ car }g\text{ solution de (H)}}=1\\ &\iff \lambda'(x)\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}=1 \iff \lambda'(x)=\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}.\end{aligned}$$

Il faut encore trouver une primitive de cette fonction $x \longmapsto \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$.

Cette fois il n'y a plus le choix, on doit séparer les cas.

a) Sur $]-1,1[$, on cherche $\lambda(x) = \int \sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}\,dx$. On va appliquer une astuce étonnante :

$$\lambda(x) = \int \sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}\,dx = \int \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1-x^2}}\,dx$$
$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$\lambda(x) = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

Les solutions de (E) sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions de la forme

$$y = \left(-\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

b) Sur $]1,+\infty[$, on a $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \frac{x+1}{x-1}$. On cherche $\lambda(x) = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$; on applique une astuce analogue :

$$\lambda(x) = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \int \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}}\,dx$$
$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$
$$\lambda(x) = \sqrt{x^2-1} + \operatorname{argch} x + C = \sqrt{x^2-1} + \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

Les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$ sont donc les fonctions de la forme

$$y = \left(\sqrt{x^2-1} + \operatorname{argch} x + C\right)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

c) Sur $]-\infty,-1[$ on cherche aussi $\lambda(x) = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$; on n'a pas besoin de refaire un calcul, car la même astuce fonctionne, sauf qu'il ne faut pas utiliser la fonction argch (non définie ici) mais son expression logarithmique avec des valeurs absolues : on obtient donc

$$\lambda(x) = \sqrt{x^2-1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C,$$

et finalement, les solutions de (E) sur $]-\infty,1[$ sont les fonctions de la forme

$$y = \left(\sqrt{x^2-1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C\right)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

5. (E) : $(x-1)y'+y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $I=]-1,1[$.

(E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire. Son équation sans second membre associée à (E) est (H) : $(x-1)y'+y=0$, qu'on peut écrire sous la forme $y'+\dfrac{1}{x-1}y=0$.

On cherche déjà à résoudre (H) :

comme $\displaystyle\int -\frac{1}{x-1}\,dx=-\ln|x-1|+C=\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ (en effet, sur I, on a $|x-1|=1-x$).

Les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $y=\dfrac{\lambda}{1-x}=\lambda g(x)$, avec $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$, g est une solution particulière de (H).

Pour résoudre (E), il ne semble pas qu'il y ait mieux que la méthode de variation de la constante.

On cherche donc les solutions de (E) sous la forme $y=\lambda(x)g(x)$, donc $y'=\lambda'(x)g(x)+\lambda(x)g'(x)$.

Une fonction y de ce type est donc solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}
&(x-1)y'+y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&\qquad\Longleftrightarrow (x-1)(\lambda'(x)g(x)+\lambda(x)g'(x))+\lambda(x)g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&\qquad\Longleftrightarrow (x-1)\lambda'(x)g(x)+\lambda(x)\underbrace{((x-1)g'(x)+g(x))}_{=0 \text{ car } g \text{ est solution de (H)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&\qquad\Longleftrightarrow \lambda'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longleftrightarrow \lambda(x)=\arccos x+C.
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (E) sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions de la forme

$$y=\frac{\arccos x+C}{1-x}.$$

6. (E) : $xy'-y=\ln|x+1|$; a) $I=]-1,0[$; b) $I=]0,+\infty[$; c) $I=]-\infty,-1[$.

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On essaiera de faire le plus longtemps possible des calculs valables sur les trois intervalles.

L'équation sans second membre associée à (E) est (H) : $xy'-y=0 \Longleftrightarrow y'-\dfrac{1}{x}y=0$.

Puisque $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $y=\lambda x$.

Il n'est pas simple de trouver une solution « évidente » de (E), donc on applique la méthode de variation de la constante.

On cherche les solutions de (E) sous la forme $y = \lambda(x)x$, donc $y' = \lambda'(x)x + \lambda(x)$. Une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$xy' - y = \ln|x+1| \iff x(\lambda'(x)x + \lambda(x)) - \lambda(x)x = \ln|x+1|$$
$$\iff x^2\lambda'(x) = \ln|x+1| \iff \lambda'(x) = \frac{\ln|x+1|}{x^2} \iff \lambda(x) = \int \frac{\ln|x+1|}{x^2}\,dx.$$

Une intégration par parties s'impose : on pose $u = \ln|x+1|$, $u' = \dfrac{1}{x+1}$, $v' = \dfrac{1}{x^2}$, $v = -\dfrac{1}{x}$, et donc

$$\lambda(x) = \int \frac{\ln|x+1|}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln|x+1|\right] - \int -\frac{1}{x}\,\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= -\frac{\ln|x+1|}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

(cette décomposition de fraction rationnelle en éléments simples était presque évidente)

$$\lambda(x) = -\frac{\ln|x+1|}{x} + \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = -\ln|x+1| + x\ln|x| - x\ln|x+1| + Cx = x\ln|x| - (x+1)\ln|x+1| + Cx;$$

a) sur $I =]-1, 0[$, on a $|x| = -x$ et $|x+1| = x+1$ donc sur cet intervalle, la solution générale de (E) est :

$$y = x\ln(-x) - (x+1)\ln(x+1) + Cx;$$

b) sur $I =]0, +\infty[$, on a $|x| = x$ et $|x+1| = x+1$ donc sur cet intervalle, la solution générale de (E) est :

$$y = x\ln(x) - (x+1)\ln(x+1) + Cx;$$

c) sur $I =]-\infty, -1[$, on a $|x| = -x$ et $|x+1| = -(x+1)$ donc sur cet intervalle, la solution générale de (E) est :

$$y = x\ln(-x) - (x+1)\ln(-(x+1)) + Cx.$$

7. (E) : $2x + yy' = 0$. Cette équation n'est clairement pas linéaire, mais elle est à variables séparables : il suffit de l'écrire $yy' = -2x$ ou encore $y\,dy = -2x\,dx$; en intégrant, on trouve qu'on a nécessairement $\dfrac{y^2}{2} = -x^2 + C_1$, donc $y^2 = C - 2x^2$; remarquons qu'on ne peut prendre que des constantes C strictement positives sinon y n'est pas définie sur un intervalle. Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = \pm\sqrt{C - 2x^2}$ avec $C > 0$; c'est sur l'intervalle (dépendant de C) $I_C = \left]-\sqrt{\frac{C}{2}}, \sqrt{\frac{C}{2}}\right[$ que sont définies les deux solutions correspondant à une constante C.

8. (E) : $(1-x^2)y' + y = 1$; a) $I =]-1,1[$; b) $I =]1,+\infty[$; c) $I =]-\infty,-1[$

(E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire ; ici encore, on fera le plus longtemps possible des calculs valables dans les trois intervalles d'étude possibles. On écrit (E) sous la forme $y' + \dfrac{1}{1-x^2}y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

L'équation homogène associée à (E) est (H) : $y' + \dfrac{1}{1-x^2} = 0$.

Comme[7] $\displaystyle\int -\frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\right)$, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $y = \lambda\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}$.

Mais cette fois, il n'y a surtout pas besoin de pratiquer la méthode de variation de la constante (ce serait sans doute aussi compliqué qu'en 4.). En effet, il y a une solution évidente. C'est la fonction constante $y = 1$, puisqu'alors on a $y' = 0$. Donc on peut conclure que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y = 1 + \lambda\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}.$$

Il suffit d'enlever les valeurs absolues selon les cas dans chacun des intervalles :

a) sur $I =]-1,1[$, la solution générale de (E) est :

$$y = 1 + \lambda\sqrt{\left(\frac{1-x}{x+1}\right)};$$

b) et c) sur $I =]1,+\infty[$ et sur $I =]-\infty,-1[$, la solution générale de (E) est :

$$y = 1 + \lambda\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}.$$

9. (E) : $xy' + y = x$; a) $I =]0,+\infty[$; b) $I =]-\infty,0[$.

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation sans second membre associée à (E) est (H) : $xy' + y = 0$, ou $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$; comme $\displaystyle\int -\frac{1}{x} = -\ln|x| + C = \ln\frac{1}{|x|} + C$, on obtient que les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $y = \lambda\dfrac{1}{x}$.

Peut-on éviter la méthode de variation de la constante pour cette équation qui semble si simple ? Certainement avec un peu d'astuce. Mais quand on ne voit pas quelle solution « évidente » il y a, on n'a pas d'autre choix que de se résigner à appliquer cette méthode un peu fastidieuse.

[7] En fait, l'équation sans second membre est ici la même que celle de l'équation du 4. de cet exercice.

On cherche donc les solutions de (E) sous la forme $y = \lambda(x)\,\dfrac{1}{x} = \lambda(x)g(x)$, avec $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est une solution particulière de (H) ; on aura donc $y' = \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)$.

Une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} xy' + y = x &\iff x(\lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)) + \lambda(x)g(x) = x \\ &\iff x\lambda'(x)g(x) + \lambda(x)\underbrace{\big(xg'(x) + g(x)\big)}_{=0 \text{ car } g \text{ est solution de (H)}} = x \\ &\iff \lambda'(x) = x \iff \lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\frac{1}{x} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

(Et là, soudainement on s'en veut de n'avoir pas été plus clairvoyant : la fonction $x \longmapsto \frac{x}{2}$ était une solution « évidente », ou presque. Enfin, soyons honnêtes, elle ne l'était pas tant que ça.)

Les solutions ci-dessus sont valables sur les deux intervalles.

10. (E) : $(\cos x)\,y' - (\sin x)\,y = \cos(2x)$; $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Son équation sans second membre associée est (H) : $(\cos x)\,y' - (\sin x)\,y = 0$, qu'on peut écrire aussi $y' - \dfrac{\sin x}{\cos x}\,y = 0$ (l'intervalle I a été choisi pour que $\cos x$ ne s'y annule pas ; on a même $\cos x > 0$ sur I). Comme $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln(\cos x) + C = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) + C$, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $y = \lambda\,\dfrac{1}{\cos x}$.

Saura-t-on éviter la méthode de variation de la constante ? OUI, à condition de connaître ses formules de trigonométrie, en particulier une des trois formules associées à $\cos 2x$. Mais comme certains lecteurs ne se les rappellent peut-être plus bien, voici tout d'abord un corrigé avec variation de constante.

On cherche donc une solution de (E) sous la forme $y = \dfrac{\lambda(x)}{\cos x} = \lambda(x)g(x)$ (avec $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ qui est une solution de (H)) ; on aura donc $y' = \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)$.

Une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}(\cos x)\,y' - (\sin x)\,y = \cos(2x)\\ \iff (\cos x)(\lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)) - (\sin x)\lambda(x)g(x) = x\\ \iff (\cos x)\lambda'(x)g(x) + \lambda(x)\underbrace{\big((\cos x)g'(x) - (\sin x)g(x)\big)}_{=0 \text{ car } g \text{ est solution de (H)}} = \cos 2x\\ \iff \lambda'(x) = \cos 2x \iff \lambda(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C = \sin x\cos x + C.\end{aligned}$$

On a donc obtenu que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y = (\sin x\cos x + C)\frac{1}{\cos x} = \sin x + \frac{C}{\cos x}.$$

Comment aurait-on pu trouver la solution évidente ?
En écrivant $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x)(\cos x) - (\sin x)(\sin x)$, et en comparant avec (E), il est évident que si on prend $y = \sin x$ et donc $y' = \cos x$, l'équation (E) est vérifiée. La solution évidente était donc la fonction sin, et si on le remarque dès le début, on peut directement conclure que les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$y = \sin x + \frac{C}{\cos x}.$$

Exercice 5.4.

1. (E) : $y' = xy^2$. On sépare les variables puis on intègre :

$$\begin{aligned}\text{(E)} &\iff \frac{y'}{y^2} = x \iff \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x\,\mathrm{d}x \iff \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x\\ &\iff -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \iff \frac{1}{y} = \frac{-x^2 + K}{2} \qquad \text{(en posant } K = -2C)\\ &\iff y = \frac{2}{K - x^2}.\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y = \dfrac{2}{K - x^2}$, définies sur $]\sqrt{K}, +\infty[$ ou sur $]-\infty, \sqrt{K}[$.

2. (E) : $\sqrt{1-x^2}\,y' - \sqrt{1-y^2} = 0$. On sépare les variables, puis on intègre :

$$\begin{aligned}\text{(E)} &\iff \sqrt{1-x^2}\,y' = \sqrt{1-y^2} \iff \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &\iff \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \iff \arcsin y = \arcsin x + C\\ &\iff y = \sin(\arcsin x + C) \iff y = x\cos C + \sqrt{1-x^2}\sin C\end{aligned}$$

Cette dernière forme n'apporte pas grand chose.

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = \sin(\arcsin x + C)$, définies sur $]-1,1[$.

3. (E) : $(1+x^2)y' + 2x + 2xy^2 = 0$. Même démarche :

$$\begin{aligned}(\text{E}) &\iff (1+x^2)y' = -2x(1+y^2) = 0 \iff \frac{y'}{1+y^2} = \frac{-2x}{1+x^2}\\ &\iff \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{-2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &\iff \arctan y = -\ln(1+x^2) + C \iff y = \tan(C - \ln(1+x^2))\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = \tan(C - \ln(1+x^2))$.

Les intervalles de définition ne doivent pas contenir des « valeurs interdites », c'est-à-dire des x tels que

$$\begin{aligned}C - \ln(1+x^2) = \frac{\pi}{2} + k\pi &\iff \ln(1+x^2) = C - k\pi - \frac{\pi}{2}\\ &\iff 1 + x^2 = \exp(C - k\pi - \frac{\pi}{2}) \iff x = \pm\sqrt{\exp(C - k\pi - \frac{\pi}{2}) - 1}.\end{aligned}$$

Il y a de nombreuses valeurs interdites pour chaque valeur de la constante C, mais chaque couple de deux valeurs interdites consécutives délimite un intervalle ouvert I sur laquelle la fonction $y = \tan(C - \ln(1+x^2))$ est une solution de (E).

4. (E) : $(1-x^2)y' - xy^2 - xy - x = 0$. C'est toujours la même méthode.

$$\begin{aligned}(\text{E}) &\iff (1-x^2)y' = x(y^2 + y + 1) \iff \frac{y'}{y^2+y+1} = \frac{x}{1-x^2}\\ &\iff \int \frac{1}{y^2+y+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le calcul de $F(y) = \displaystyle\int \frac{1}{y^2+y+1}\,\mathrm{d}y$ est un peu plus délicat que d'habitude : on écrit le dénominateur sous forme canonique, $y^2 + y + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, puis on factorise $\frac{3}{4}$, avant d'appliquer le changement de variable $u = \frac{2y+1}{\sqrt{3}}$, donc $\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}F(y) &= \int \frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{2y+1}{2}\right)^2\right) + 1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{4}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + C.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\iff \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C \\
&\iff \arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\ln|x^2-1| + C \\
&\iff \frac{2y+1}{\sqrt{3}} = \tan\left(C - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln|x^2-1|\right) \\
&\iff 2y+1 = \sqrt{3}\tan\left(C - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln|x^2-1|\right) \\
&\iff y = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(C - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln|x^2-1|\right) - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(C - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln|x^2-1|\right) - \frac{1}{2},$$

définies sur des intervalles ouverts ne contenant pas de « valeur interdite », qui sont les nombres ± 1 ainsi que les x tels que $C - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln|x^2-1| = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

5. (E) : $y' = \dfrac{1-y}{1-2x}$; encore la même démarche, mais on peut remarquer qu'on ne peut diviser par $1-y$ que si $y \neq 1$, la fonction constante $y = 1$ étant par ailleurs une solution « évidente » de (E). Donc pour $y \neq 1$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\iff \frac{y'}{1-y} = \frac{1}{1-2x} \iff \frac{y'}{y-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} \\
&\iff \int \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&\iff \ln|y-1| = \frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + C \iff \ln|y-1| = \ln\left(\sqrt{\left|x-\frac{1}{2}\right|}\right) + C \\
&\iff y-1 = \lambda\sqrt{\left|x-\frac{1}{2}\right|} \iff y = 1 + \lambda\sqrt{\left|x-\frac{1}{2}\right|}
\end{aligned}$$

Remarquons qu'accepter les λ négatifs a permis d'ôter les valeurs absolues autour de $(y-1)$, tandis qu'en autorisant que λ puisse être nul, on récupère la solution constante $y = 1$ qu'on avait remarquée dès le début. Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions du type $y = 1 + \lambda\sqrt{\left|x-\frac{1}{2}\right|}$ (avec λ réel quelconque), définies sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ ou sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

6. (E) : $(1+y)y' = 4x^3$; voici un exemple tout simple, où les variables sont déjà séparées !

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\iff \int (1+y)\,\mathrm{d}y = \int 4x^3\,\mathrm{d}x \iff \frac{(1+y)^2}{2} = x^4 + C\\ &\iff (1+y)^2 = 2x^4 + C \iff 1+y = \pm\sqrt{2x^4+C}\\ &\iff y = -1 \pm \sqrt{2x^4+C}.\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = -1 \pm \sqrt{2x^4+C}$, définies sur $\mathbb{R}$ pour $C > 0$, et sur $\left]-\infty, -\sqrt[4]{\frac{C}{2}}\right[$ ou sur $\left]\sqrt[4]{\frac{C}{2}}, +\infty\right[$ pour $C \leqslant 0$.

7. (E) : $(4-x^2)yy' = 2(1+y^2)$. Classiquement :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\iff \frac{yy'}{1+y^2} = \frac{2}{4-x^2} \iff \int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{-2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x\\ &\iff \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C\\ &\iff y^2 + 1 = \lambda\frac{x+2}{x-2} \iff y^2 = \lambda\frac{x+2}{x-2} - 1\\ &\iff y = \pm\sqrt{\lambda\frac{x+2}{x-2} - 1}\end{aligned}$$

Les solutions sont les fonctions de la forme

$$y = \pm\sqrt{\lambda\frac{x+2}{x-2} - 1} = \pm\sqrt{\frac{(\lambda-1)x + (2\lambda+2)}{x-2}},$$

définies sur des intervalles ne contenant pas 2, et sur lesquels la quantité sous le radical est strictement positive : on étudie l'inéquation $\dfrac{(\lambda-1)x+(2\lambda+2)}{x-2} > 0$ par exemple avec un tableau de signe et on trouve les intervalles suivants :

- si $\lambda < 0$, $I = \left]\frac{2(1+\lambda)}{1-\lambda}, 2\right[$
- pour $\lambda = 0$, aucun intervalle ne convient ;
- si $0 < \lambda < 1$, $I = \left]2, \frac{2(1+\lambda)}{1-\lambda}\right[$;
- pour $\lambda = 1$, $I =]2, +\infty[$;
- pour $\lambda > 1$, $I = \left]-\infty, \frac{2(1+\lambda)}{1-\lambda}\right[$ ou $I =]2, +\infty[$.

Exercice 5.5. (E) : $y^2 + y'^2 = 1$; cette équation différentielle du premier ordre n'est, a priori, ni linéaire, ni à variables séparables. Mais on peut la modifier un petit peu :

$$(\mathrm{E}) \iff y'^2 = 1 - y^2 \iff y' = \sqrt{1-y^2} \text{ ou } y' = -\sqrt{1-y^2}$$

Les solutions de (E) sont donc solutions de l'équation (E_1) : $y' = \sqrt{1-y^2}$ ou de l'équation (E_2) : $y' = -\sqrt{1-y^2}$. Nous allons résoudre successivement ces deux équations, et nous

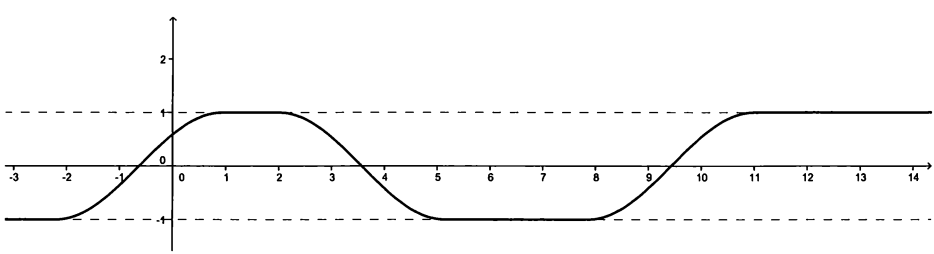
trouverons alors toutes les solutions de (E). Remarquons que ces deux équations sont en fait à variables séparables ; mais pour séparer les variables, on est amené, dans les deux cas, à diviser par $\sqrt{1-y^2}$ ce qui suppose qu'on élimine les solutions correspondant à $y = \pm 1$; or, justement les deux fonctions constantes $y = 1$ et $y = -1$ sont clairement des solutions évidentes de (E) qu'il faudrait penser à ajouter à l'ensemble des solutions.

$$(E_1) \iff \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1 \iff \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int dx \iff \arcsin y = x + C$$
$$\iff y = \sin(x + C)$$

De même :

$$(E_2) \iff \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = -1 \iff \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = -\int dx \iff \arcsin y = -x + C$$
$$\iff y = \sin(-x + C)$$

Finalement, on a trouvé comme fonctions solutions de (E) les fonctions du type $y = \sin(\pm x + C)$ (c'étaient d'ailleurs des solutions « évidentes »(compte tenu de la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$) ; mais en fait ce ne sont pas les seules fonctions solutions : en effet, ces fonctions oscillent entre –1 et 1, *en atteignant ces valeurs*, ce qui fait qu'en ces points, on atteint $y = 1$ ou $y = -1$ et que donc le raisonnement qui nous a permis d'affirmer que ces fonctions sont les seules n'est plus valable.
Sans rentrer dans les détails, on peut montrer que les solutions de cette équation sont effectivement les fonctions du type plus haut, mais qu'il faut y ajouter non seulement les fonctions constantes $y = 1$ et $y = -1$, mais aussi toute fonction « intermédiaire », qui évoluerait entre –1 et 1 avec des paliers pour ces valeurs, et en suivant une sinusoïde entre ces deux valeurs. Voici un exemple d'une telle fonction solution (notons qu'il n'y a aucun problème de discontinuité ou de non dérivabilité aux points de raccord entre les morceaux de sinusoïdes et les droites horizontales.)



Exercice 5.6.

1. Comme on a $z(x) = \dfrac{1}{y(x)^2} = y(x)^{-2}$, en application des formules de dérivation :

$$z'(x) = -2y(x)^{-3}y'(x) = -\frac{2y'(x)}{y(x)^3}.$$

2. Puisqu'on a supposé que y est solution de (E) $y' + 2xy = 2xy^3$, en divisant par y^3, on obtient $\frac{y'}{y^3} + 2\frac{x}{y^2} = 2x$, soit en utilisant l'expression de z et de z' :
$-\frac{z'}{2} + 2xz = 2x$, ce qui donne (E′) : $z' - 4xz = -4x$.
3. (E′) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Son équation sans second membre associée est (H) : $z' - 4xz = 0$. Puisque $\int 4x\,dx = 2x^2 + C$, les solutions de (H) sont les fonctions du type $z = \lambda e^{2x^2}$, définies sur $\mathbb{R}$.
$z = 1$ est une solution évidente de l'équation (E′), donc les solutions de (E′) sont les fonctions de la forme $z = 1 + \lambda e^{2x^2}$.
Si y est solution de (E), alors $z = \frac{1}{y^2}$ est solution de (E′), donc on a

$$z = \frac{1}{y^2} = 1 + \lambda e^{2x^2};$$

par conséquent $y^2 = \frac{1}{1 + \lambda e^{2x^2}}$ et $y = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda e^{2x^2}}}$.
Nous avons raisonné par conditions nécessaires. Il faut donc maintenant vérifier qu'une fonction de ce type est une solution de (E).
Or, si $y = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda e^{2x^2}}}$, alors $y' = \pm\frac{-4x\lambda e^{2x^2}}{2\sqrt{1 + \lambda e^{2x^2}}\,(1 + \lambda e^{2x^2})}$
donc

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= \pm\left(\frac{-2x\lambda e^{2x^2}}{\sqrt{1 + \lambda e^{x^2}}\,(1 + \lambda e^{2x^2})} + \frac{2x}{\sqrt{1 + \lambda e^{2x^2}}}\right) \\ &= \pm\frac{-2x\lambda e^{2x^2} + 2x\left(1 + \lambda e^{2x^2}\right)}{\sqrt{1 + \lambda e^{x^2}}\left(1 + \lambda e^{2x^2}\right)} \\ &= \pm\frac{2x}{\left(\sqrt{1 + \lambda e^{x^2}}\right)^3} = 2xy^3 \end{aligned}$$

Et y est bien solution de (E).
Ces solutions $y = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda e^{2x^2}}}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ pour $\lambda \geqslant 0$, mais seulement sur $\left]-\sqrt{\ln(\sqrt{-\lambda})}, \sqrt{\ln(\sqrt{-\lambda})}\right[$ si $-1 < \lambda < 0$, et sur aucun intervalle si $\lambda \leqslant -1$.

Exercice 5.7.

1. a) (E) : $y'' + 3y' + 2y = 0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est

$r^2+3r+2=0$, de racines -1 et -2, donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$.

b) Une solution de (E) est telle que $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$ et $y'=-Ae^{-x}-2Be^{-2x}$, donc $y(0)=A+B$ et $y'(0)=-A-2B$; cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0)=y'(0)=1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A-2B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=3 \quad (L_1 \leftarrow 2L_1+L_2) \\ B=-2 \quad (L_2 \leftarrow -L2-L_1). \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0)=y'(0)=1$ est donc la fonction $y=3e^{-x}-2e^{-2x}$.

2. a) (E) : $y''+2y'+y=0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est $r^2+2r+1=0$, de racine double $r=-1$, donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y=Ae^{-x}+Bxe^{-x}$.

b) Une solution de (E) est telle que $y=Ae^{-x}+Bxe^{-x}$ et $y'=-Ae^{-x}+Be^{-x}-Bxe^{-x}=(-A+B)e^{-x}-Bxe^{-x}$, donc $y(0)=A$ et $y'(0)=-A+B$. Cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0)=y'(0)=1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A=1 \\ -A+B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ B=2. \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0)=y'(0)=1$ est donc la fonction $y=e^{-x}+2xe^{-x}$.

3. a) (E) : $y''+2y'+2y=0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est $r^2+2r+2=0$, de discriminant $\Delta=-4<0$, donc qui admet deux racines complexes conjuguées dont l'une est $r=\dfrac{-2+2i}{2}=-1+i$; donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y=e^{-x}\big(A\cos x+B\sin x\big)$.

b) Une solution de (E) est telle que $y=e^{-x}\big(A\cos x+B\sin x\big)$ et donc

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}\big(A\cos x+B\sin x\big)+e^{-x}\big(-A\sin x+B\cos x\big) \\ &= e^{-x}\big((-A+B)\cos x+(-B-A)\sin x\big), \end{aligned}$$

donc $y(0)=A$ et $y'(0)=-A+B$.

Cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0)=y'(0)=1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A=1 \\ -A+B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ B=2. \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = y'(0) = 1$ est donc la fonction $y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$.

4. a) (E) : $y'' - 6y' + 13y = 0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est $r^2 - 6r + 13 = 0$, de discriminant $\Delta = -16 < 0$, donc qui admet deux racines complexes conjuguées dont l'une est $r = \dfrac{6+4i}{2} = 3 + 2i$; donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y = e^{3x}\big(A\cos 2x + B\sin 2x\big)$.

b) Une solution de (E) est telle que $y = e^{3x}\big(A\cos 2x + B\sin 2x\big)$ et donc

$$\begin{aligned} y' &= 3e^{3x}\big(A\cos 2x + B\sin 2x\big) + e^{3x}\big(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\big) \\ &= e^{3x}\big((3A+2B)\cos x + (3B-2A)\sin x\big), \end{aligned}$$

donc $y(0) = A$ et $y'(0) = 3A + 2B$.

Cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1. \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = y'(0) = 1$ est donc la fonction $y = e^{3x}(\cos 2x - \sin 2x)$.

5. a) (E) : $y'' - y' + y = 0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = -3 < 0$, donc qui admet deux racines complexes conjuguées dont l'une est

$r = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$; donc les solutions de (E) sont les fonctions du type

$y = e^{\frac{1}{2}x}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big)$.

b) Une solution de (E) est telle que $y = e^{\frac{1}{2}x}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big)$ et donc

$$\begin{aligned} y' = {} & \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\Big(A\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) + B\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big) \\ & + e^{\frac{1}{2}x}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}A\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}B\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big) \\ = {} & e^{\frac{1}{2}x}\Big(\Big(\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B\Big)\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) + \Big(\frac{1}{2}B - \frac{\sqrt{3}}{2}A\Big)\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big), \end{aligned}$$

donc $y(0) = A$ et $y'(0) = \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B$; cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A = 1 \\ \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = y'(0) = 1$ est donc la fonction $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$.

6. a) (E) : $12y'' - 60y' + 75y = 0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est $12r^2 - 60r + 75 = 0$, de discriminant $\Delta = 3600 - 4 \times 12 \times 75 = 0$, donc qui admet une racine double $r = \dfrac{60}{24} = \dfrac{5}{2}$; donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}(A + Bx)$.

b) Une solution de (E) est telle que $y = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}(A + Bx)$ et donc $y' = \dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}(A + Bx) + \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}B = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}\left(\left(\dfrac{5}{2}A + B\right) + \dfrac{5}{2}Bx\right)$, donc $y(0) = A$ et $y'(0) = \dfrac{5}{2}A + B$. Cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A = 1 \\ \frac{5}{2}A + B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = y'(0) = 1$ est donc la fonction $y = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}\left(1 - \dfrac{3}{2}x\right)$.

7. a) (E) : $20y'' + 9y' + y = 0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est $20r^2 + 9r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 81 - 80 = 1$, donc qui admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{-9+1}{40} = -\dfrac{1}{5}$ et $r_2 = \dfrac{-9-1}{40} = -\dfrac{1}{4}$; donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} + B\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

b) Une solution de (E) est telle que $y = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} + B\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ et donc $y' = -\dfrac{1}{5}A\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} - \dfrac{1}{4}B\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, donc $y(0) = A + B$ et $y'(0) = -\dfrac{1}{5}A - \dfrac{1}{4}B$; cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -\frac{1}{5}A - \frac{1}{4}B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ 4A + 5B = -20 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 25 \\ B = -24. \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = y'(0) = 1$ est donc la fonction $y = 25e^{-\frac{1}{5}x} - 24e^{-\frac{1}{4}x}$.

8. a) (E) : $3y'' - 5y' - 2y = 0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est $3r^2 - 5r - 21 = 0$, de discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$, donc qui admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{5+7}{6} = 2$ et $r_2 = \dfrac{5-7}{6} = -\dfrac{1}{3}$; donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y = Ae^{2x} + Be^{-\frac{1}{3}x}$.

   b) Une solution de (E) est telle que $y = Ae^{2x} + Be^{-\frac{1}{3}x}$ et donc $y' = 2Ae^{2x} - \dfrac{1}{3}Be^{-\frac{1}{3}x}$, donc $y(0) = A + B$ et $y'(0) = 2A - \frac{1}{3}B$; cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - \frac{1}{3}B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ 6A - B = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{4}{7} \\ B = \frac{3}{7}. \end{cases}$$

   La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = y'(0) = 1$ est donc la fonction $y = \dfrac{4}{7}e^{2x} + \dfrac{3}{7}e^{-\frac{1}{3}x}$.

9. a) (E) : $y'' - 8y' + 17y = 0$; c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Son équation caractéristique est $r^2 - 8r + 17 = 0$, de discriminant $\Delta = 64 - 68 = -4 = (2i)^2$, donc qui admet deux racines complexes conjuguées, dont l'une est $r_1 = \dfrac{8+2i}{2} = 4 + i$; donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y = e^{4x}\big(A\cos x + B\sin x\big)$.

   b) Une solution de (E) est telle que $y = e^{4x}\big(A\cos x + B\sin x\big)$ et donc

$$\begin{aligned} y' &= 4e^{4x}\big(A\cos x + B\sin x\big) + e^{4x}\big(-A\sin x + B\cos x\big) \\ &= e^{4x}\big((4A + B)\cos x + (4B - A)\sin x\big), \end{aligned}$$

   donc $y(0) = A$ et $y'(0) = 4A + B$.
   Cette solution de (E) vérifie les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$ si et seulement si A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A = 1 \\ 4A + B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -3. \end{cases}$$

   La solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = y'(0) = 1$ est donc la fonction $y = e^{4x}\big(\cos x - 3\sin x\big)$.

Exercice 5.8.

1. (E) : $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-3x}$; ceci est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $y'' + 3y' + 2y = 0$; on reconnaît l'équation différentielle qu'on a résolue au 1. de l'exercice précédent. On a vu que les solutions de cette équation homogène sont les fonctions de la forme $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$. Pour trouver toutes les solutions de (E), il suffit d'ajouter à cette solution générale de (H) une solution particulière de (E) ; on va chercher une solution de (E) sous la forme $y = \lambda e^{-3x}$ (car -3 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$) ; on aura donc $y' = -3\lambda e^{-3x}$ et $y'' = 9\lambda e^{-3x}$; une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$9\lambda e^{-3x} + 3\left(-3\lambda e^{-3x}\right) + 2\left(\lambda e^{-3x}\right) = 2e^{-3x} \iff \lambda(9 - 9 + 2) = 2 \iff \lambda = 1$$

La fonction $y = e^{-3x}$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y = e^{-3x} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$.

2. (E) : $y'' + 2y' + y = x + 4$; ceci est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $y'' + 2y' + y = 0$; on reconnaît l'équation différentielle qu'on a résolue au 2. de l'exercice précédent. On a vu que les solutions de cette équation homogène sont les fonctions de la forme $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$. Pour trouver toutes les solutions de (E), il suffit d'ajouter à cette solution générale de (H) une solution particulière de (E) ; on va chercher une solution de (E) sous la forme $y = \lambda x + \mu$ (un polynôme de même degré que le second membre) ; on aura donc $y' = \lambda$ et $y'' = 0$; une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$0 + 2\lambda + (\lambda x + \mu) = x + 4 \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ 2\lambda + \mu = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2. \end{cases}$$

La fonction $y = x + 2$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y = x + 2 + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.

3. (E) : $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$; nous avons presque le même exercice qu'en 1., mais nous verrons qu'il y a une nuance de taille. (E) est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $y'' + 3y' + 2y = 0$; on reconnaît l'équation différentielle qu'on a résolue au 1. de l'exercice précédent. On a vu que les solutions de cette équation homogène sont les fonctions de la forme $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$. Pour trouver toutes les solutions de (E), il suffit d'ajouter à cette solution générale de (H) une solution particulière de (E) ; on va chercher une solution de (E) non pas sous la forme $y = \lambda e^{-2x}$ (car -2 est une racine de l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$) mais sous la forme $y = \lambda x e^{-2x}$ (on a augmenté le degré du polynôme devant l'exponentielle d'une unité : au lieu d'une constante (de degré 0), on prend

un polynôme du type λx, de degré 1) ; on aura donc $y' = \lambda e^{-2x} + \lambda x(-2e^{-2x}) = \lambda(-2x+1)e^{-2x}$ et $y'' = \lambda\left(-2e^{-2x} - 2(-2x+1)e^{-2x}\right) = \lambda(4x-4)e^{-2x}$; une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda(4x-4)e^{-2x} + 3\lambda(-2x+1)e^{-2x} + 2\lambda x e^{-2x} = e^{-2x}$$
$$\iff (4\lambda - 6\lambda + 2\lambda)x e^{-2x} + (-4\lambda + 3\lambda)e^{-2x} = e^{-2x} \iff \lambda = -1.$$

La fonction $y = -xe^{-2x}$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y = -xe^{-2x} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$.

4. (E) : $y'' + 2y' + 2y = 5\sin(x)$; ceci est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $y'' + 2y' + 2y = 0$; on reconnaît l'équation différentielle qu'on a résolue au 3. de l'exercice précédent. On a vu que les solutions de cette équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y = e^{-x}\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Pour trouver toutes les solutions de (E), il suffit d'ajouter à cette solution générale de (H) une solution particulière de (E) ; on va chercher une solution de (E) sous la forme $y = \lambda\cos x + \mu\sin x$; on aura donc $y' = -\lambda\sin x + \mu\cos x$ et $y'' = -\lambda\cos x - \mu\sin x$; une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$\left(-\lambda\cos x - \mu\sin x\right) + 2\left(\mu\cos x - \lambda\sin x\right) + 2\left(\lambda\cos x + \mu\sin x\right) = 5\sin x$$
$$\iff \begin{cases} -\lambda + 2\mu + 2\lambda = 0 \\ -\mu - 2\lambda + 2\mu = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 1. \end{cases}$$

La fonction $y = -2\cos x + \sin x$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = -2\cos x + \sin x + e^{-x}\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

5. (E) : $y'' + y = x^2 - 1$; ceci est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $y'' + y = 0$; l'équation caractéristique de cette équation est $r^2 + 1 = 0$, qui admet deux racines complexes conjuguées dont l'une est $r = i$; les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme $y = A\cos x + B\sin x$. Pour trouver toutes les solutions de (E), il suffit d'ajouter à cette solution générale de (H) une solution particulière de (E) ; on va chercher une solution de (E) sous la forme $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (polynôme de même degré que le second membre $x^2 - 1$) ; on aura donc $y' = 2\alpha x + \beta$ et $y'' = 2\alpha$; une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$2\alpha + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 - 1 \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ 2\alpha + \gamma = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -3. \end{cases}$$

La fonction $y = x^2 - 3$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y = x^2 - 3 + A\cos x + B\sin x$.

6. (E) : $2y'' + y' - y = 3\cos 2x - \sin 2x$; ceci est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $2y'' + y' - y = 0$; l'équation caractéristique de cette équation est $2r^2 + r - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 9$, et de racines $r_1 = -1$ et $r_2 = \frac{1}{2}$; les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme $y = Ae^{-x} + Be^{\frac{1}{2}x}$. Pour trouver toutes les solutions de (E), il suffit d'ajouter à cette solution générale de (H) une solution particulière de (E) ; on va chercher une solution de (E) sous la forme $y = \lambda\cos 2x + \mu\sin 2x$; on aura donc $y' = -2\lambda\sin 2x + 2\mu\cos 2x$ et $y'' = -4\lambda\cos 2x - 4\mu\sin 2x$; une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$2\big(-4\lambda\cos 2x - 4\mu\sin 2x\big) + \big(2\mu\cos 2x - 2\lambda\sin 2x\big) - \big(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x\big) = 3\cos 2x - \sin 2x$$

$$\iff \begin{cases} -8\lambda + 2\mu - \lambda = 3 \\ -8\mu - 2\lambda - \mu = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -9\lambda + 2\mu = 3 \\ -2\lambda - 9\mu = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}} = -\dfrac{25}{85} \\ \mu = \dfrac{\begin{vmatrix} -9 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}} = \dfrac{15}{85}. \end{cases}$$

La fonction $y = -\dfrac{5}{17}\cos 2x + \dfrac{3}{17}\sin 2x$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = -\frac{5}{17}\cos 2x + \frac{3}{17}\sin 2x + Ae^{-x} + Be^{\frac{1}{2}x}.$$

7. (E) : $y'' - 4y = 13\cos 3x$; même méthode que plus haut, les solutions de l'équation homogène sont évidentes (de la forme $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$), et $y = -\cos 3x$ est une solution évidente de (E), donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = -\cos 3x + Ae^{2x} + Be^{-2x}$.

8. (E) : $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$; ceci est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second

membre associée est (H) : $y'' - 6y' + 9y = 0$; l'équation caractéristique de cette équation est $r^2 - 6r + 9 = 0 = (r-3)^2$, de discriminant $\Delta = 0$, et de racine double $r = 3$; les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme $y = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$. Pour trouver toutes les solutions de (E), il suffit d'ajouter à cette solution générale de (H) une solution particulière de (E) ; on va chercher une solution de (E) sous la forme $y = \lambda x^2 e^{3x}$; en effet, 3 est une racine *double* de l'équation caractéristique, dans un tel cas, on doit augmenter de deux unités le degré du polynôme situé devant l'exponentielle. On aura donc $y' = 2\lambda x e^{3x} + \lambda x^2 (3e^{3x}) = \lambda(2x + 3x^2)e^{3x}$ et $y'' = \lambda(2+6x)e^{3x} + \lambda(2x+3x^2)(3e^{3x}) = \lambda(2+12x+9x^2)e^{3x}$; une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} &\Big(\lambda(2+12x+9x^2)e^{3x}\Big) - 3\Big(\lambda(2x+3x^2)e^{3x}\Big) + 9\Big(\lambda x^2 e^{3x}\Big) = e^{3x} \\ \iff\ & 2\lambda e^{3x} = e^{3x} \quad \text{(tous les autres termes disparaissent)} \\ \iff\ & \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La fonction $y = \frac{1}{2}x^2 e^{3x}$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y = \left(A + Bx + \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$.

Exercice 5.9.

1. Soit (E) : $y'' + 3y' + 2y = 6e^{-x}$; cette équation différentielle est du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $y'' + 3y' + 2y = 0$; l'équation caractéristique de (H) est $r^2 + 3r + 2 = 0$, qui admet deux racines réelles, $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$; la solution générale de (H) est $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$. Pour trouver la solution générale de (E), il suffit déjà de trouver une solution particulière (on lui ajoutera ensuite la solution générale de (H)). On cherchera une solution particulière de (E) sous la forme $y = \lambda x e^{-x}$, car -1 est racine de l'équation caractéristique : il faut donc augmenter d'une unité le degré du polynôme devant l'exponentielle (au lieu de chercher une solution sous la forme $y = \lambda e^{-x}$ avec λ constante, c'est-à-dire un polynôme de degré 0, on remplace λ par λx qui est un polynôme de degré 1). Pour une telle fonction, on a $y' = \lambda e^{-x} + \lambda x(-e^{-x}) = \lambda(1-x)e^{-x}$ et $y'' = \lambda(-1)e^{-x} + \lambda(1-x)(-e^{-x}) = \lambda(-2+x)e^{-x}$. Une telle fonction est solution de (E) lorsque :

$$\begin{aligned} &\Big(\lambda(-2+x)e^{-x}\Big) + 3\Big(\lambda(1-x)e^{-x}\Big) + 2\Big(\lambda x e^{-x}\Big) = 6e^{-x} \\ &\qquad\qquad \iff \lambda(1+0x)e^{-x} = 6e^{-x} \iff \lambda = 6 \end{aligned}$$

La fonction $y = 6xe^{-x}$ est une solution particulière de (E), donc la solution générale de (E) est $y = 6xe^{-x} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$.

On cherche maintenant la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$. C'est une solution de (E), donc il existe deux constantes A et B telles que $y = 6xe^{-x} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$; mais on a alors $y'(x) = (6-6x)e^{-x} - Ae^{-x} - 2Be^{-2x}$; on a donc $y(0) = A + B$ et

$y'(0) = 6-A-2B$. Une fonction y sous cette forme est solution de (E) si et seulement si (A,B) est solution du système :

$$\begin{cases} A+B=2 \\ A+2B=6 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-2 \\ B=4. \end{cases}$$

Donc l'unique solution y de l'équation $y''+3y'+2y = xe^{-x}$ vérifiant de plus la c.i. $y(0)=2$ et $y'(0)=0$ est la fonction $y = 6xe^{-x}-2e^{-x}+4e^{-2x}$.

2. Soit (E) : $y''+2y'+2y = 5\cos(t)+2$, et on considère les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=0$. Cette équation différentielle (E) est du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $y''+2y'+2y=0$; on a déjà étudié cette équation à l'exercice 5.7.3., et on a vu que la solution générale de (H) est $y = e^{-t}\big(A\cos t + B\sin t\big)$ (ici la variable est t et non pas x, il faut savoir s'adapter). Pour trouver la solution générale de (E), il suffit déjà de trouver une solution particulière (on lui ajoutera ensuite la solution générale de (H)). Mais comme le second membre de (E) est en deux morceaux, on cherchera d'une part une solution particulière pour l'équation (E_1) : $y''+2y'+2y=2$ (celle-ci est totalement triviale : il suffit de prendre $y=1$) et d'autre part une solution particulière pour l'équation (E_2) : $y''+2y'+2y = 5\cos t$; on cherchera une solution particulière de (E_2) sous la forme $y = \lambda\cos t + \mu\sin t$; on a $y' = -\lambda\sin t + \mu\cos t$ et $y'' = -\lambda\cos t - \mu\sin t$. Une telle fonction est solution de (E_2) lorsque :

$$\begin{aligned} &\big(-\lambda\cos t-\mu\sin t\big)+2\big(\mu\cos t-\lambda\sin t\big)+2\big(\lambda\cos t+\mu\sin t\big)=5\cos t \\ &\iff \big(-\lambda+2\mu+2\lambda\big)\cos t+\big(-\mu-2\lambda+2\mu\big)\sin t = 5\cos t \\ &\iff \begin{cases} \lambda+2\mu=5 \\ -2\lambda+\mu=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=1 \\ \mu=2. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction $y = \cos t + 2\sin t$ est une solution particulière de (E_2). Une solution particulière de (E) s'obtient en additionnant la solution particulière de (E_1) et la solution particulière de (E_2) : $y = 1+\cos t+2\sin t$.

La solution générale de (E) est donc $y = 1+\cos t+2\sin t+e^{-t}\big(A\cos t+B\sin t\big)$.

On cherche maintenant la solution de (E) qui vérifie $y(0)=2$ et $y'(0)=0$. C'est une solution de (E), donc il existe deux constantes A et B telles que $y = 1+\cos t+2\sin t+e^{-t}\big(A\cos t+B\sin t\big)$; mais on a alors

$$y'(t) = -\sin t+2\cos t-e^{-t}\big(A\cos t+B\sin t\big)+e^{-t}\big(-A\sin t+B\cos t\big);$$

on a donc $y(0) = 1+1+A$ et $y'(0) = 2-A+B$. Une fonction y sous cette forme est solution de (E) avec la c.i. $(0,2,0)$ si et seulement si (A,B) est solution du système :

$$\begin{cases} A+2=2 \\ 2-A+B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0 \\ B=-2. \end{cases}$$

Donc l'unique solution y de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 5\cos t + 2$ vérifiant de plus la c.i. $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$ est la fonction $y = 1 + \cos t + 2\sin t - 2e^{-t}\sin t$.

Cherchons maintenant la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. En reprenant le raisonnement précédent, on doit cette fois trouver deux constantes A et B qui vérifient le système

$$\begin{cases} A + 2 = 0 \\ 2 - A + B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2 \\ B = -4. \end{cases}$$

Donc l'unique solution y de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 5\cos t + 2$ vérifiant de plus la c.i. $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est la fonction $y = 1 + \cos t + 2\sin t + e^{-t}(-2\cos t - 4\sin t)$.

Exercice 5.10.

1. (E) : $y'' + y = \cos(t)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, et avec un second membre ; son équation sans second membre associée est (H) : $y'' + y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ qui admet deux racines complexes conjuguées, dont l'une est $r_1 = i$; les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme $y = A\cos t + B\sin t$; ce n'est donc pas sous cette forme qu'on pourra chercher une solution particulière de (E) : il faut augmenter d'une unité le degré du polynôme, et donc remplacer les constantes par des termes de premier degré. On cherche donc une solution particulière de (E) sous la forme $y = t(\alpha\cos t + \beta\sin t)$, et donc
$y' = (\alpha\cos t + \beta\sin t) + t(-\alpha\sin t + \beta\cos t) = (\alpha + \beta t)\cos t + (\beta - \alpha t)\sin t$ et
$y'' = 2(-\alpha\sin t + \beta\cos t) + t(-\alpha\cos t - \beta\sin t) = (2\beta - \alpha t)\cos t + (-2\alpha - \beta t)\sin t$.
Une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si :

$$\left[(2\beta - \alpha t)\cos t + (-2\alpha - \beta t)\sin t\right] + \left[\alpha t\cos t + \beta t\cos t\right] = \cos t$$

$$\iff 2\beta\cos t - 2\alpha\sin t = \cos t \iff \beta = \frac{1}{2}$$

Une solution particulière de (E) est donc la fonction $y = \frac{1}{2}\, t\sin t$ et la solution générale de (E) est donc

$$y = \frac{1}{2}\, t\sin t + A\cos t + B\sin t$$

2. (E) : $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x + e^{2x}$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, et avec un second membre ; son équation sans second membre associée est (H) : $y'' - 4y' + 4y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui admet une racine double $r = 2$; les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme $y = (Ax + B)e^{2x}$. Le second membre de (E) étant une somme, on cherchera

d'une part une solution particulière de l'équation $(E_1) : y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$, puis une solution particulière de l'équation $(E_2) : y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$; en additionnant ces deux solutions particulières, on obtiendra une solution particulière de (E).

Solution particulière de $(E_1) : y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$

Une solution particulière de cette équation sera sous la forme $y = (\lambda x + \mu)e^x$, donc $y' = (\lambda x + \mu + \lambda)e^x$ et $y'' = (\lambda x + \mu + 2\lambda)e^x$; une fonction sous cette forme est solution de (E_1) si et seulement si :

$$\begin{aligned}&\big((\lambda x+\mu+2\lambda)e^x\big) - 4\big((\lambda x+\mu+\lambda)e^x\big) + 4\big((\lambda x+\mu)e^x\big) = (2x-4)e^x\\ &\iff \big(\lambda x+\mu-2\lambda\big)e^x = (2x-4)e^x \iff \begin{cases}\lambda = 2\\ \mu - 2\lambda = -4\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda = 2\\ \mu = 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_1) est donc la fonction $y_1 = 2xe^x$.

Solution particulière de $(E_2) : y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

On cherche une solution particulière de cette équation sous la forme $y = \alpha x^2 e^{2x}$ (car 2 est racine double de l'équation caractéristique de (H), donc il faut augmenter de deux unités le degré du polynôme), donc $y' = \alpha(2x + 2x^2)e^{2x}$ et $y'' = \alpha(2 + 8x + 4x^2)e^{2x}$; une fonction sous cette forme est solution de (E_2) si et seulement si :

$$\begin{aligned}&\big(\alpha(2+8x+4x^2)e^{2x}\big) - 4\big(\alpha(2x+2x^2)e^{2x}\big) + 4\big(\alpha x^2 e^{2x}\big) = e^{2x}\\ &\iff \alpha\big((4-8+4)x^2e^{2x} + (8-8)xe^{2x} + 2e^{2x}\big) = e^{2x} \iff 2\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_2) est donc la fonction $y_2 = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

Une solution particulière de (E) est donc la fonction $y = y_1 + y_2 = 2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$, et la solution générale de (E) est donc :

$$y = 2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + (Ax + B)e^{2x}$$

3. $(E) : y'' + 2y' - 8y = 4e^{2x}(3x+5)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, et avec un second membre ; son équation sans second membre associée est (H) : $y'' + 2y' - 8y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + 2r - 8 = 0$ qui admet deux racines réelles $r = 2$ et $r = -4$; les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme $y = Ae^{2x} + Be^{-4x}$. Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, il faut augmenter d'une unité le degré du polynôme accompagnant e^{2x} lors d'une recherche de solution particulière : on cherchera une solution particulière de (E) sous la forme $y = (ax^2 + bx)e^{2x}$; on a donc $y' = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx)e^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b)e^{2x}$ et

$$\begin{aligned}y'' &= (4ax + 2a + 2b)e^{2x} + 2(2ax^2 + (2a + 2b)x + b)e^{2x}\\ &= (4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b)e^{2x}.\end{aligned}$$

Donc une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$\Big((4ax^2+(8a+4b)x+2a+4b)+2(2ax^2+(2a+2b)x+b)-8(ax^2+bx)\Big)\mathrm{e}^{2x} = (12x+20)\mathrm{e}^{2x}$$

$$\iff \Big((4a+4a-8a)x^2+(8a+4b+4a+4b-8b)x+(2a+4b+2b)\Big)\mathrm{e}^{2x} = (12x+20)\mathrm{e}^{2x}$$

$$\iff \begin{cases} 12a = 12 \\ 2a+6b = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 3. \end{cases}$$

Donc une solution particulière de (E) est la fonction $y = (x^2+3x)\mathrm{e}^{2x}$, et finalement la solution générale de (E) est

$$y = (x^2+3x)\mathrm{e}^{2x} + A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{-4x}.$$

4. (E) : $y''-4y'+13y = 10\cos(2x)+25\sin(2x)$; ceci est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, et avec un second membre. Son équation sans second membre associée est (H) : $y''-4y'+13y = 0$; l'équation caractéristique est $r^2-4r+13=0$, de discriminant $\Delta = 16-52 = -36 < 0$, donc qui admet deux racines complexes conjuguées dont l'une est $r = \dfrac{4+6\mathrm{i}}{2} = 2+3\mathrm{i}$; donc les solutions de (E) sont les fonctions du type $y = \mathrm{e}^{-2x}\big(A\cos 3x + B\sin 3x\big)$. On va chercher une solution de (E) sous la forme
$y = \lambda\cos 2x + \mu\sin 2x$; on aura donc $y' = -2\lambda\sin 2x + 2\mu\cos 2x$ et
$y'' = -4\lambda\cos 2x - 4\mu\sin 2x$; une fonction sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$(-4\lambda\cos 2x - 4\mu\sin 2x) - 4(2\mu\cos 2x - 2\lambda\sin 2x) + 13(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x) = 10\cos 2x + 25\sin 2x$$

$$\iff (-4\lambda-8\mu+13\lambda)\cos 2x + (-4\mu+8\lambda+13\mu)\sin 2x = 10\cos 2x + 25\sin 2x$$

$$\iff \begin{cases} 9\lambda-8\mu = 10 \\ 8\lambda+9\mu = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} 10 & -8 \\ 25 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}} \\ \mu = \dfrac{\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 8 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{290}{145} = 2 \\ \mu = \dfrac{145}{145} = 1. \end{cases}$$

La fonction $y = 2\cos 2x + \sin 2x$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = 2\cos 2x + \sin 2x + e^{2x}\big(A\cos 3x + B\sin 3x\big).$$

Exercice 5.11. L'équation différentielle (E) : $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ est une équation du second ordre, linéaire, à coefficients constants. Son équation homogène associée est (H) : $y'' - y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ admet comme racines évidentes $r = \pm 1$, donc les solutions de (H) sont les fonctions du type $y = Ae^x + Be^{-x}$.
Pour appliquer la méthode de variation des constantes, on cherche les solutions de (E) sous la forme $y = A(x)e^x + B(x)e^{-x} = A(x)y_1 + B(x)y_2$, en ayant posé $y_1 = e^x$ et $y_2 = e^{-x}$; on impose aussi $y' = A(x)y_1' + B(x)y_2'$, de sorte qu'on impose en même temps $A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0$, puisqu'a priori $y' = A(x)y_1' + A'(x)y_1 + B(x)y_2' + B'(x)y_2$. On a alors $y'' = A'(x)y_1' + A(x)y_1'' + B'(x)y_2' + B(x)y_2''$
Une fonction y sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\big(A'(x)y_1' + A(x)y_1'' + B'(x)y_2' + B(x)y_2''\big) - \big(A(x)y_1 + B(x)y_2\big) = \frac{1}{e^x + 1}\\
&\iff A(x)(y_1'' - y_1) + B(x)(y_2'' - y_2) + (A'(x)y_1' + B'(x)y_2') = \frac{1}{e^x + 1}\\
&\iff A'(x)y_1' + B'(x)y_2' = \frac{1}{e^x + 1} \quad \text{(puisque } y_1 \text{ et } y_2 \text{ sont solutions de (H))}
\end{aligned}$$

$A'(x)$ et $B'(x)$ sont donc solutions du système

$$\begin{cases} A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0 \\ A'(x)y_1' + B'(x)y_2' = \dfrac{1}{e^x + 1} \end{cases} \iff \begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)e^{-x} = 0 \\ A'(x)e^x - B'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + 1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A'(x)e^x = \dfrac{1}{2(e^x + 1)} \\ B'(x)e^{-x} = -\dfrac{1}{2(e^x + 1)} \end{cases} \iff \begin{cases} A'(x) = \dfrac{1}{2e^x(e^x + 1)} \\ B'(x) = -\dfrac{e^x}{2(e^x + 1)}. \end{cases}$$

Il suffit maintenant de calculer les deux primitives
$A(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{1}{e^x(e^x + 1)}\,dx$ et $B(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$.
Dans les deux cas, le changement de variable $u = e^x$, donc $du = e^x\,dx$ donne la solution :
$B(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{1}{u+1}\,du = -\frac{1}{2}\ln(u+1) + C = -\frac{1}{2}\ln(e^x + 1) + C_1$
et à peine plus délicat :
$A(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}(e^x + 1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2(u+1)}\,du$; on doit maintenant faire une décomposition en éléments simples : il existe trois constantes a, b, c telles que

$C(u) = \dfrac{1}{u^2(u+1)} = \dfrac{a}{u^2} + \dfrac{b}{u} + \dfrac{c}{u+1}$; on trouve immédiatement $a = 1$ et $c = 1$ (respectivement en multipliant par u^2 et en faisant $u = 0$, puis en multipliant par $(u+1)$ et en faisant $u = -1$). Ensuite, en considérant la limite à l'infini de $uC(u)$, il est clair que $b + c = 0$ donc $b = -1$. D'où $C(u) = \dfrac{1}{u^2} - \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{u+1}$ et :

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{u^2}\,du - \int \frac{1}{u}\,du + \int \frac{1}{u+1}\,du\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u} - \ln u + \ln(u+1)\right) + C_2$$
$$= -\frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2}\ln(e^x) + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_2 = -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_2.$$

Finalement les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_2\right)e^x + \left(-\frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_1\right)e^{-x}$$
$$y = \frac{1}{2}\left(-1 - xe^x + e^x\ln(e^x+1) - e^{-x}\ln(e^x+1)\right) + C_2e^x + C_1e^{-x}$$
$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}xe^x + \operatorname{sh} x\ln(e^x+1) + C_2e^x + C_1e^{-x}.$$

Exercice 5.12.

$$\text{(E)} \qquad x^2y'' + xy' + y = 0$$

1. Puisque $y(x) = z(\ln x)$, en dérivant, on obtient bien sûr $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln x)$, et en dérivant une seconde fois, on obtient

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x}\frac{1}{x}z''(\ln x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x).$$

2. Puisque y est supposée être une solution de (E), on a

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 \iff -z'(\ln x) + z''(\ln x) + z'(\ln x) + z(\ln x) = 0$$
$$\iff z''(u) + z(u) = 0 \quad \text{(E')}$$

3. Les solutions de (E') sont les fonctions z du type $z(u) = A\cos u + B\sin u$ (voir l'exercice 55.8, question 5 et sa correction), donc en revenant à la variable x, on trouve que les solutions de (*E*) sont les fonctions du type

$$y = y(x) = A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x).$$

Exercice 5.13. L'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$ est une équation du second ordre, linéaire, à coefficients constants. Son équation homogène associée est (H) : $y'' + 9y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées, dont l'une est $r = 3i$, donc les solutions de (H) sont les fonctions du type $y = A\cos 3x + B\sin 3x$.

Pour appliquer la méthode de variation des constantes, on cherche les solutions de (E) sous la forme $y = A(x)\cos 3x + B(x)\sin 3x = A(x)y_1 + B(x)y_2$, en ayant posé $y_1 = \cos 3x$ et $y_2 = \sin 3x$; on impose aussi $y' = A(x)y_1' + B(x)y_2'$, de sorte qu'on impose en même temps $A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0$, puisque, a priori
$y' = A(x)y_1' + A'(x)y_1 + B(x)y_2' + B'(x)y_2$.
On a alors $y'' = A'(x)y_1' + A(x)y_1'' + B'(x)y_2' + B(x)y_2''$.
Une fonction y sous cette forme est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\left(A'(x)y_1' + A(x)y_1'' + B'(x)y_2' + B(x)y_2''\right) + 9\left(A(x)y_1 + B(x)y_2\right) = \frac{1}{\cos 3x} \\
&\iff A(x)(y_1'' + 9y_1) + B(x)(y_2'' + 9y_2) + (A'(x)y_1' + B'(x)y_2') = \frac{1}{\cos 3x} \\
&\iff A'(x)y_1' + B'(x)y_2' = \frac{1}{\cos 3x} \text{ (puisque } y_1 \text{ et } y_2 \text{ sont solutions de (H))}
\end{aligned}$$

$A'(x)$ et $B'(x)$ sont donc solutions du système

$$\begin{cases} A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0 \\ A'(x)y_1' + B'(x)y_2' = \dfrac{1}{\cos 3x} \end{cases} \iff \begin{cases} A'(x)\cos 3x + B'(x)\sin 3x = 0 \\ -3A'(x)\sin 3x + 3B'(x)\cos 3x = \dfrac{1}{\cos 3x}. \end{cases}$$

Pour trouver $A'(x)$, on multiplie la première équation par $3\cos 3x$ et la deuxième par $-\sin 3x$ avant d'additionner, tandis que pour trouver $B'(x)$, on multiplie la première équation par $3\sin 3x$ et la deuxième par $\cos 3x$. On obtient le système

$$\begin{cases} 3A'(x) = \dfrac{-\sin 3x}{\cos 3x} \\ 3B'(x) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A'(x) = \dfrac{1}{9}\,\dfrac{-3\sin 3x}{\cos 3x} \\ B'(x) = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Il suffit maintenant de calculer les deux primitives presque évidentes :
$A(x) = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}\,dx = \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + C_1$ et $B(x) = \displaystyle\int \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}x + C_2$;
Finalement les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$y = \left(\frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + C_1\right)\cos 3x + \left(\frac{1}{3}x + C_2\right)\sin 3x$$

$$y = \frac{1}{9}\ln|\cos 3x|\cos 3x + \frac{1}{3}x\sin 3x + C_1\cos 3x + C_2\sin 3x.$$

Quelques techniques de calcul

Dans cette annexe, on précise quelques techniques de calcul classiques, qui nous seront très utiles tout au long de cet ouvrage, et qui ne sont pratiquement plus enseignées au lycée.

1. Inégalités

Voici, sans démonstration, les règles de calcul sur les inégalités.

Proposition .13 Soit a, x, y, x', y' des nombres réels.

- Si $x \leqslant y$, alors $x + a \leqslant y + a$.
- Si $x \leqslant y$ et si $a \geqslant 0$, alors $xa \leqslant ya$.
- Si $x \leqslant y$ et si $a \leqslant 0$, alors $xa \geqslant ya$.
- Si $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y'$, alors $x + x' \leqslant y + y'$
- Si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant x' \leqslant y'$, alors $xx' \leqslant yy'$
- Si $0 < x \leqslant y$ alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$
- Si x et y sont positifs ou nuls, alors $x \leqslant y \iff x^2 \leqslant y^2$.

Remarque. On peut additionner des inégalités membre à membre. On peut aussi multiplier des inégalités de nombres positifs. En revanche, il n'est pas question de soustraire membre à membre des inégalités, encore moins de les diviser, et on ne multiplie pas des inégalités sans s'être assuré qu'elles concernent bien des nombres positifs.

Remarque : Toutes ces propriétés ont été énoncées avec des inégalités larges ($\leqslant$ et $\geqslant$) ; il existe à chaque fois une version avec des inégalités strictes ($<$ et $>$), dont l'énoncé précis est laissé au lecteur à titre d'exercice. Il suffit de se poser la question : « Peut-il y avoir égalité ? ».

2. Valeur absolue

Définition .14 Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x, notée $|x|$ est le nombre égal à x si $x \geqslant 0$, et égal à $-x$ dans le cas contraire.

On montre aisément que $|x| = \max(x,-x)$, et on a donc toujours $x \leqslant |x|$ et $|x| \geqslant 0$. D'autre part, on a toujours $|x|^2 = x^2$, ce qui fournit une méthode pour ôter les valeurs absolues dans certaines situations.
Depuis le lycée, on sait que $|x-y| = d(x,y) = |y-x|$, la valeur absolue sert à mesurer la distance entre deux réels.

Proposition .15 $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
Pour tout x et tout y, $|xy| = |x|\,|y|$;
Pour tout x et tout y, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

Corollaire .16 Pour tout x et tout y, $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y|$ (deuxième inégalité triangulaire) ;
Soit $\delta > 0$, alors $|x-a| \leqslant \delta$ si et seulement si $a-\delta \leqslant x \leqslant a+\delta$

En pratique, les expressions avec des *valeurs absolues* sont difficiles à manier. Par exemple, on ne dérive pas une expression qui contient une valeur absolue, on ne primitive pas une expression avec valeur absolue. Les équations ou inéquations avec valeurs absolues sont difficiles. On doit donc savoir « ôter les valeurs absolues ». Pour cela, on dispose essentiellement de deux méthodes :

- Faire une étude de cas : on étudie le signe des quantités dont on prend les valeurs absolues, et on raisonne « selon les cas », par exemple à l'aide d'un tableau.
- Pour les égalités et les inégalités, on peut parfois s'en sortir en « élevant au carré », puisque, comme on l'a vu plus haut, on a $|x|^2 = x^2$.

3. Racine carrée

Proposition .17 (et définition) Soit x un nombre réel positif. Il existe un seul nombre réel positif, noté $\sqrt{x}$ et tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

Proposition .18 Si $a \geqslant 0$ et si $b \geqslant 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Remarque : On a donc : Si $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$. Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. En revanche, dès que $\sqrt{x}$ a un sens (c'est-à-dire lorsque $x \geqslant 0$), on a $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$; en résumé : $\sqrt{x^2}$ existe toujours mais on doit réfléchir, tandis que $\left(\sqrt{x}\right)^2$ se simplifie toujours lorsque ça a un sens.

On évitera absolument d'écrire un nombre négatif sous un radical. Pour nous, l'écriture $\sqrt{f(x)}$ n'a de sens que si x est tel que $f(x) \geqslant 0$. En particulier, même si on travaille avec les nombres complexes, on se gardera de remplacer i par $\sqrt{-1}$, bien qu'on ait $i^2 = -1$. On peut en revanche dire : « i est une racine carrée de -1 ».

4. Trinômes, équations et inéquations du second degré

Un trinôme est un polynôme du second degré, du type ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$. Une équation du second degré est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$.
Au lycée, on a résolu de telles équations, en utilisant le discriminant $\Delta = b^2-4ac$.
En fait, au départ, on utilise la forme canonique du trinôme :

$$P(x) = ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{a}{c}\right)$$
$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Grâce à cette forme, on retrouve le résultat classique des valeurs des racines selon le discriminant :

- si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine « double » qui est $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de racine réelle.

Mais on peut aussi

- *factoriser* $P(x)$ lorsque $\Delta \geqslant 0$: si $\Delta > 0$, $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ et si $\Delta = 0$, $P(x) = a(x-x_0)^2$;
- *déterminer le signe de* $P(x)$: si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a ; si $\Delta = 0$, $P(x)$ est aussi toujours du signe de a, sauf pour x_0 : $P(x_0) = 0$; enfin, si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a « à l'extérieur des racines »(c'est-à-dire sur $]-\infty, x'[$ et sur $]x'', +\infty[$, en posant $x' = \min(x_1, x_2)$ et $x'' = \max(x_1, x_2)$), et du signe de $-a$ « entre les racines »(c'est-à-dire sur $]x', x''[$).

De plus, lorsque $\Delta \geqslant 0$, en développant la forme factorisée de $P(x)$ et en comparant avec l'expression initiale, on trouve le résultat suivant concernant *la somme et le produit des racines* :

$$\begin{cases} x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Enfin, en complément, si on travaille dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, dans le cas $\Delta < 0$, la forme canonique peut néanmoins être factorisée en utilisant la formule $A^2+B^2 = (A+iB)(A-iB)$, et on montre ainsi que l'équation $P(x) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées (non réelles) qui sont $x_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; (ces deux dernières formules ne sont pas en contradiction avec la précaution énoncée à la fin du § précédent : le nombre sous le radical est ici positif, puisque $\Delta < 0$, on a bien $-\Delta > 0$).

5. Coefficients du binôme, triangle de Pascal, formule du binôme

Les « coefficients du binôme » sont les nombres $\binom{n}{p}$ (on lit « p parmi n ») ; $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties ayant p éléments dans un ensemble de n éléments.
En conséquence, on a forcément $\binom{n}{p} = 0$ pour $n < 0$ ou pour $p > n$. Il est tout à fait évident qu'on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (l'ensemble vide est la seule partie de 0 éléments dans un ensemble de n éléments, et il n'y a aussi qu'un sous-ensemble de n éléments, qui est l'ensemble entier).
Il est très facile de voir que $\binom{n}{1} = n$ (il y a n *singletons* — c'est-à-dire sous ensembles n'ayant qu'un élément — dans un ensemble de n éléments.
À chaque sous-ensemble F de p éléments d'un ensemble E de n éléments correspond l'ensemble de $n-p$ éléments des éléments de E qui ne sont pas dans F. Il y a donc autant de parties à p éléments que de parties à $n-p$ éléments, de sorte que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
Pour pouvoir calculer les coefficients du binôme, on démontre les formules suivantes [8]

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!}.$$

Par exemple, on a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Triangle de Pascal

On montre la formule $(*)$ $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$, ce qui permet de construire le *triangle de Pascal* pour calculer les premiers coefficients du binôme.
Pour remplir ce tableau, on part de deux cases contiguës déjà remplies, par exemple celles correspondant à $\binom{5}{3}$ et $\binom{5}{4}$ (qui contiennent respectivement 10 et 5), on additionne ces contenus et on met le résultat (ici 15) juste en dessous de la case de droite : sous $\binom{5}{4}$, donc dans la case correspondant à $\binom{6}{4}$. Ceci parce qu'en vertu de la formule $(*)$ ci-dessus, on a $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$. On remplit ainsi ce tableau de proche en proche.

[8] $n!$ désigne le nombre *factorielle de n* : c'est le produit des n premiers entiers.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

On pose aussi 0! = 1! = 1, et on a 2! = 2, 3! = 6 etc.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	$\cdots$				
1	1	1	0	0	$\cdots$			
2	1	2	1	0	0	$\cdots$		
3	1	3	3	1	0	0	$\cdots$	
4	1	4	6	4	1	0	0	$\cdots$
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7								

Le lecteur pourra ainsi remplir la ligne 7, et retrouver ainsi les valeurs de tous les $\binom{7}{p}$. Tout au début, on a commencé à placer des 1 pour les $\binom{n}{0}$ et les $\binom{n}{n}$.

Proposition .19 (Formule du binôme) Soit n un entier naturel, non nul.
$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$.

Preuve Cette formule se démontre par récurrence. Elle est évidente pour $n = 1$, et pour passer de n à $n+1$, c'est la formule $(*)$ du triangle de Pascal qui fournit l'argument décisif. □

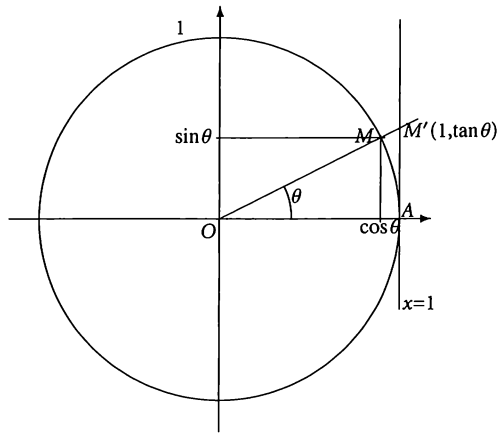
On en déduit la formule analogue du développement de $(a-b)^n$:

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n b^n$$

C'est vraiment la même formule, il y a juste un « clignotement du signe ».

6. Trigonométrie

Le cercle trigonométrique, rappel des définitions de sinus, cosinus et tangente :
Pour un point M du cercle trigonométrique (cercle de centre O, de rayon 1), si θ est la mesure algébrique de l'arc de cercle $\overset{\smile}{AM}$ (avec le signe + si on tourne dans le sens direct, i.e. le sens contraire aux aiguilles d'une montre, avec le signe – si on tourne dans le sens indirect), alors M a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$, et on a $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$. En prolongeant la droite (OM), celle-ci rencontre la droite verticale T d'équation $x = 1$ en le point $M'(1, \tan\theta)$



Formules de trigonométrie.

Il y a de nombreuses formules de trigonométrie. En voici quelques unes qu'il est conseillé de connaître parfaitement.

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$; $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

Valeurs usuelles :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Arcs associés :

pour $u=$	$-x$	$x+2\pi$	$x+\pi$	$\pi-x$	$x+\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}-x$
$\sin u=$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\cos u=$	$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan u=$	$-\tan x$	$\tan x$	$\tan x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\cot x$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$; $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$; $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$; $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$; $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$; $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$

Si $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan x=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Transformation de produits en sommes :

$$\begin{cases} \sin x \cos y &= \frac{1}{2}\big(\sin(x+y)+\sin(x-y)\big) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x+y)+\cos(x-y)\big) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big) \end{cases}$$

Transformation de produits en sommes :

$$\begin{cases} \sin p+\sin q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p-\sin q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p+\cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p-\cos q &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

(On peut retenir ces dernières formules avec la « comptine » : **sico, cosi, coco moins sisi**)

7. Résolution de systèmes

Nous donnons ici la méthode de Kramer pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues de déterminant non nul.

Définition .20 Soient a,b,c,d quatre nombres (réels ou complexes). On appelle déterminant de ces quatre nombres le réel $ad-bc$; on le note :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

Proposition .21 Soit $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$ un système de deux équations à deux inconnues x et y (a,b,c,d,α,β sont des paramètres). On suppose que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Alors $(\mathcal{S})$ admet une unique solution qui est (x,y) avec $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$.

En pratique, on retient les *formules de Kramer* $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ en disant que dans le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta, \end{cases}$: a et c sont les coefficients de x ; b et d sont les coefficients de y ; α et β sont les coefficients constants.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ est le déterminant Δ du système $(\mathcal{S})$;

$\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix} = \alpha d - b\beta$ est le déterminant Δ_x du système $(\mathcal{S})$; on l'obtient à partir de Δ en remplaçant la colonne des coefficients de x par la colonne des coefficients constants.

$\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix} = a\beta - \alpha c$ est le déterminant Δ_y du système $(\mathcal{S})$; on l'obtient à partir de Δ en remplaçant la colonne des coefficients de y par la colonne des coefficients constants.

Les formules de Kramer s'écrivent alors

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\alpha d - b\beta}{ad-bc} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a\beta - c\alpha}{ad-bc}.$$

Preuve On part des deux équations $(L_1) : ax+by=\alpha$ et $(L_2) : cx+dy=\beta$ qui composent le système $(\mathcal{S})$. On « élimine » y en multipliant la première ligne par d et la deuxième par $-b$ avant d'additionner : on fait la transformation $(dL_1 - bL_2)$ et on trouve l'équation $(ad-bc)x = \alpha d - b\beta$, d'où nécessairement $x = \dfrac{\alpha d - b\beta}{ad-bc}$ (puisque le déterminant du système est supposé non nul).

On « élimine » maintenant x en multipliant la première ligne par $-c$ et la deuxième par a avant d'additionner : on fait la transformation $(-cL_1 + aL_2)$ et on obtient $(-bc+ad)y = -\alpha c + a\beta$ et donc nécessairement $y = \dfrac{a\beta - c\alpha}{ad-bc}$.

On a prouvé que si le système admet un couple de solutions, c'est forcément le couple donné par les formules de Kramer.

Il reste à vérifier que ce couple est bien une solution. Or, on a :

$$\begin{cases} a\dfrac{\alpha d - b\beta}{ad-bc} + b\dfrac{a\beta - c\alpha}{ad-bc} = \dfrac{a\alpha d - bc\alpha}{ad-bc} = \dfrac{\alpha(ad-bc)}{ad-bc} = \alpha \\ c\dfrac{\alpha d - b\beta}{ad-bc} + d\dfrac{a\beta - c\alpha}{ad-bc} = \dfrac{-cb\beta + da\beta}{ad-bc} = \dfrac{\beta(ad-bc)}{ad-bc} = \beta. \end{cases}$$

□

Certifié PEFC
Ce produit est issu de forêt gérées durablement et de sources contrôlées
www.pefc-france.org
PEFC/10-31-2007
BVC/dC/1702681

Achevé d'imprimer en juin 2011 par EMD S.A.S. (France)
N° éditeur : 2011/679 - Dépôt légal : juin 2011
N° d'imprimeur : 25143

Bruno Aebischer

Introduction à l'analyse

Rédigé principalement à l'attention de tous les étudiants en première année de Licence, l'ouvrage présente l'ensemble du programme d'analyse avec un cours complet et 216 exercices d'application corrigés. D'un niveau très accessible, il apporte une base solide de révision et d'entraînement aux techniques élémentaires d'analyse, également utile aux élèves de classes préparatoires, d'IUT ou même de BTS.

Sommaire

1. Fonctions continues – Fonctions dérivables
2. Étude de fonctions
3. Nouvelles fonctions de référence
4. Calcul intégral
5. Équations différentielles

Indications pour la résolution des exercices
Solutions des exercices
Annexe : Quelques techniques de calcul

Agrégé de mathématiques, **Bruno Aebischer** enseigne à l'UFR sciences et techniques de l'université de Franche-Comté. Il a été professeur en classes préparatoires puis a rejoint l'université en qualité de professeur agrégé de l'enseignement du second degré (PRAG). Il a participé durant plusieurs années au jury du CAPES de mathématiques.

ISBN 978-2-311-00274-4

9 782311 002744